EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

Persoonlijke herinneringen aan prof. Van der Blij

GeoGebra als vervanging van de grafische rekenmachine?

Didactiek van telproblemen

Afronden: significante cijfers en decimalen

Wiskunst:
het werk van Willem Kloppers

NR.6

JAARGANG 93 - MEI 2018



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

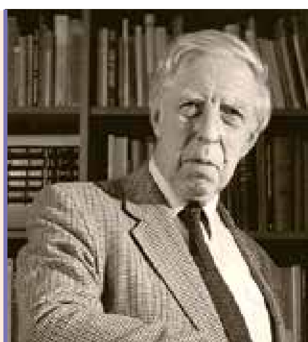


INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 93 NR.6

IN DIT NUMMER

HERINNERINGEN AAN FREDERIK VAN DER BLIJ
JOOP VAN DORMOLEN
MARTIN KINDT
NELLIE VERHOEF
JAN DE LANGE
4



GEOGEBRA ALS VERVANGING VAN DE GRAFISCHE REKENMACHINE
IRENE VAN STIPHOUT
IVO CLAUS
JOS REMIJN
10

DIDACTIEKCOLLEGE OVER TELPROBLEMEN
SASKIA VAN BOVEN
GERRIT ROORDA
14

UITDAGENDE PROBLEMEN
DE FACEBOOK INTEGRAAL
JACQUES JANSEN
18



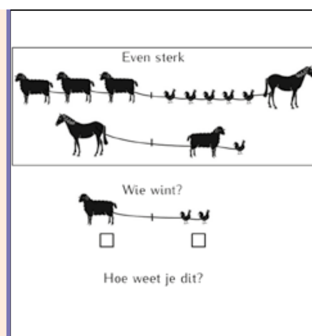
LEREN LOGISCH REDENEREN BIJ WISKUNDE C ≠ CURSUS LOGICA
HUGO BRONKHORST
GERRIT ROORDA
22

WIS EN WAARACHTIG
26

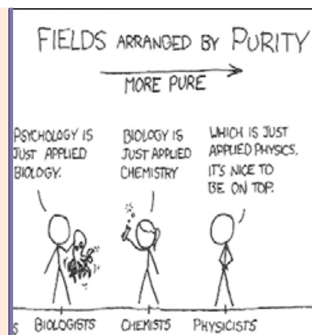
KLEINTJE DIDACTIEK
LONNEKE BOELS
28

VASTGEROEST
AB VAN DER ROEST
31

HET FIZIER GERICHT OP…
ALGEBRAÏSCH REDENEREN
MARA OTTEN
32



BOEKBESPREKING
WAT WE NIET KUNNEN WETEN
GER LIMPENS
ERNST LAMBECK
34



HET WERK VAN WILLEM KLOPPERS
JAN AARTS
37

EEN DRIEHOEK EN TWEE VIERKANTEN
DICK KLINGENS
40

Magisch vierkant, beeldhouwwerk door Willem Kloppers

Foto: Elise Kloppers

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

WERELDWISKUNDEFONDS IN SIERRA LEONE 44
SISTER MARY ANTONY
MRS. JOSEPHINE NICOL

PUZZEL 45
BIRGIT VAN DALEN
QUINTIJN PUITE

SERVICEPAGINA 46

Kort vooraf

In deze *Euclides* blikken we terug op het leven van Frederik van der Blij. Joop van Dormolen, Martin Kindt, Jan de Lange en Nellie Verhoef hebben hun herinneringen aan Frederik van der Blij geschreven, waarvoor de redactie hen zeer dankbaar is.
Mijn eerste ervaring met Frederik van der Blij dateert van september 1977. Ik was begonnen met een studie natuur- en sterrenkunde in Utrecht, en met mij te veel anderen, naar men destijds vermoedde door het Wubbo Ockels-effect. Bij wiskunde waren er relatief te weinig studenten, dus werd er een middag georganiseerd waarin Frederik van der Blij ons ging overhalen om te switchen. Wij konden ons vooraf nauwelijks voorstellen dat dat zou gaan lukken. De naam 'Van der Blij' prijkte namelijk ook op ons gortdroge wiskundeboek, de blauwe Prisma-Technica pocket *Infinitesimaalrekening*, met daarin wiskunde die 'in de eerste plaats bruikbaar is voor fysici, en die bovendien aanvaardbaar is voor mathematici', zoals in het voorwoord raadselachtig stond. Maar het zal je niet verbazen: het was een middag om nooit te vergeten. Deze voordracht, en een interview in het studentenclubblad *De Vakidioot* in datzelfde jaar, hebben uiteindelijk bijgedragen tot mijn omkering naar de wiskunde. Dat interview en een aantal andere bijdragen zijn te vinden op de website.
Maar de natuurkunde zit nog steeds in mijn bloed. Daarom doet het me deugd dat we in deze *Euclides* ook kunnen lezen over 'wiskunde die aanvaardbaar is voor fysici'. Zolang wij blijven 'afronden op decimalen' en niet overgaan op 'afronden op significante cijfers' is dat nog niet het geval, maar draagt het 'Kleintje didactiek' van Lonneke Boels (zie blz 28) vast bij aan de discussie daarover.

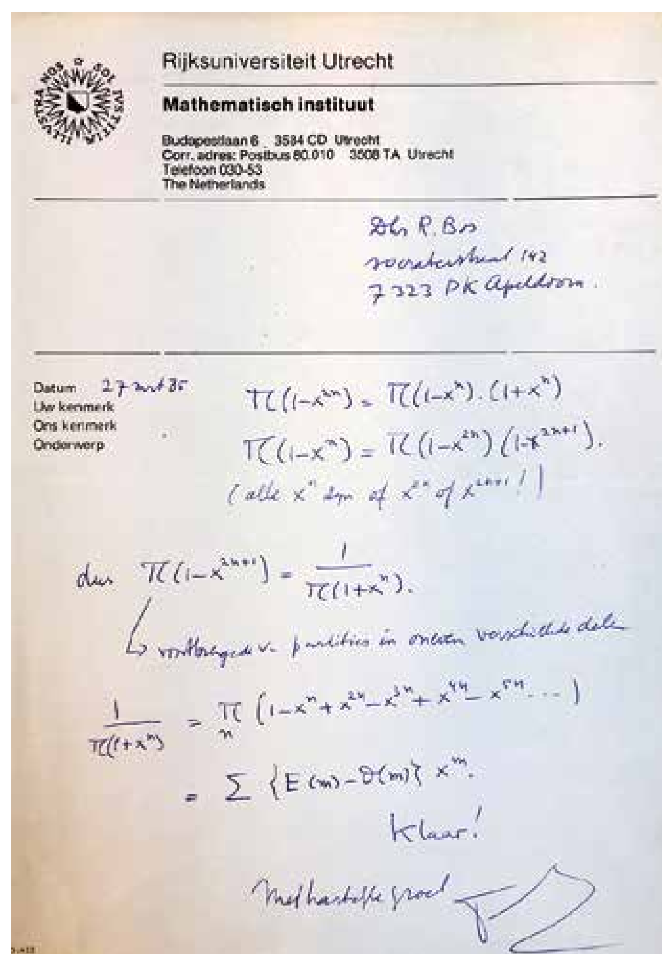
Tom Goris

HERINNERINGEN AAN FREDERIK VAN DER BLIJ

Joop van Dormolen
Martin Kindt
Nellie Verhoef
Jan de Lange

Op 27 januari 2018 overleed Frederik van der Blij. De redactie van *Euclides* vroeg een aantal mensen die hem van zeer nabij hebben meegemaakt om hun herinner-ingen aan professor Van der Blij te delen. Als eerbetoon aan een van de meest markante ereleden van de NVvW.

Tijdens de redactievergadering waarop het idee van deze bloemlezing werd besproken, haalde Rob Bosch een brief tevoorschijn uit een boek. Hij worstelde in 1985 met een wiskundig probleem en had Frederik van der Blij om hulp gevraagd. Hij verwachtte een lang en ingewikkeld antwoord, maar ook hier trad het vermaarde Van der Blij-effect op: het antwoord leek ogenschijnlijk eenvoudig en paste op een half A-viertje.



Rijksuniversiteit Utrecht

Mathematisch instituut

Budapestlaan 6 3584 CD Utrecht
Corr. adres: Postbus 80.010 3508 TA Utrecht
Telefoon 030-53
The Netherlands

Drs R. Bos
voorsterstraat 142
7323 PK Apeldoorn.

Datum 27 mrt 85
Uw kenmerk
Ons kenmerk
Onderwerp

$\Pi(1-x^{2n}) = \Pi(1-x^n).(1+x^n)$

$\Pi(1-x^n) = \Pi(1-x^{2n})(1-x^{2n+1})$.

(alle x^n zijn of x^{2n} of x^{2n+1}!)

dus $\Pi(1-x^{2n+1}) = \dfrac{1}{\Pi(1+x^n)}$.

↳ voortbrengende v. partities in oneven verschillende delen

$\dfrac{1}{\Pi(1+x^n)} = \prod_n (1-x^n+x^{2n}-x^{3n}+x^{4n}-x^{5n}\ldots)$

$= \sum \{E(m)-O(m)\}\, x^m$.

Klaar!

Met hartelijke groet

figuur 1



Frederik van der Blij (1923 – 2018).
Met dank aan *de Volkskrant* voor het gebruik van de foto

OVER VAN DER BLIJS WARME INTERESSE IN ANDEREN

Joop van Dormolen

De eerste keer dat ik Van der Blij ontmoette was tijdens mijn mondeling examen voor de volledige bevoegdheid voor wiskundeonderwijs op de middelbare school. Dat examen, K5 geheten, was naast een universitaire studie de enige mogelijkheid om een dergelijke bevoegdheid te halen. Je studeerde bij een privéleraar en het examen was een staatsexamen. Een mondeling examen werd afgenomen door twee examinatoren. Een ervan, hij bleek later professor Van der Blij te heten, vroeg mij dingen die ik bij mijn voorbereiding nooit was tegengekomen, zoals bij analytische meetkunde over derdegraads vergelijkingen waarbij de coëfficiënten gehele getallen modulo 5 waren. Na een paar eerste momenten van paniek kreeg ik plezier in het probleem. Het was mijn eerste kennismaking met Van der Blijs kunde om creativiteit bij anderen te stimuleren. Dat zou ik later nog vele malen bij hem tegenkomen. Nadat ook de andere examinator mij ondervraagd had (beschrijvende meetkunde) lieten ze me niet direct

gaan. De eerste examinator begon een gesprek en vroeg of ik van plan was nog verder te studeren. Hij zei dat zoiets zeker mogelijk zou zijn bij hem aan de Universiteit van Utrecht. In mijn naïviteit vond ik dat een vreemde vraag: ik was nu immers klaar om les te geven? Maar zoiets zeg je dan niet en ik beloofde erover na te denken.

Stimuleren tot studie

Het was mijn eerste kennismaking met Van der Blijs kunde om anderen te stimuleren tot studie. Ook dat zou ik later nog vaak tegenkomen. Ik ben toch maar eens gaan informeren in Utrecht. Daar kwam ik die examinator weer tegen. Omdat ik K5 en drie jaar wiskunde bij de (toenmalige) Technische Hogeschool in Delft achter de kiezen had, bemiddelde hij bij collega's om mij, naast mijn volle baan als leraar, te helpen bij de studie. Vanwege mijn volle baan als leraar, waar ik ook vaak betrokken raakte bij buitenschoolse activiteiten zoals regie van toneelstukken, heeft de studie tot het doctoraalexamen tien jaar geduurd. Het zou beslist langer geduurd hebben of waarschijnlijk definitief afgebroken zijn, als ik niet een aantal malen in een conferentie Van der Blij was tegengekomen die mij dan vroeg hoe het met de studie ging en wanneer ik weer eens tentamen bij hem of een van zijn collega's kwam doen. Ik geloof dat ik zonder zijn stimulansen de studie niet zou hebben afgemaakt. Tijdens een conferentie in Antwerpen deed hij het weer, maar deze keer was hij wat strenger dan gewoonlijk. Hoe lang was ik nou al bezig geweest? Bijna tien jaar? Zou het niet hoog tijd zijn om het af te maken? Ik moest maar gauw eens bij hem komen praten. Dat heb ik toen maar gedaan en dankzij zijn stimulans haalde ik in juni 1965 mijn doctoraalexamen. Op zichzelf is mijn doctoraalexamen in dit verhaal niet relevant, ware het niet dat op de dag erna een inspecteur voor wiskundeonderwijs bij mijn rector in de kamer zat om te vertellen dat men mij wilde vragen mee te werken in een commissie voor een nieuw leerplan voor analyse in de bovenbouw van het toekomstige vwo. Later heb ik begrepen dat Van der Blij daar achter zat, die zelf voorzitter van die commissie was.
De commissie was een subcommissie van de CMLW[1] waar Freudenthal voorzitter van was. Van der Blij volgde hem op. Dankzij hem ben ik bij het werk van deze commissie betrokken geweest.

Vakdidactiek

Bij de voorbereiding van het nieuwe leerplan voor mbo, havo en vwo werden er in de jaren zestig heroriënteringscursussen voor wiskundeleraren gegeven. Ik deed daar ook aan mee, maar later mocht ik er ook colleges geven. We wilden het daarbij vooral hebben over de didactische inhoud van het nieuwe leerplan, maar een paar van de toenmalige inspecteurs voor wiskundeonderwijs vonden het niet goed dat er over didactiek werd gepraat tijdens de heroriënteringscursussen. Zij waren van de oude stempel en vonden dat didactiek tot de verantwoordelijkheid van de leraar hoorde. Staatsdidactiek was uit den boze in een democratische samenleving. Ik had daar bij Van der Blij over gemopperd en hij had er een truc voor bedacht. Een leraar werd gevraagd om als leerling op te treden. De 'les' werd opgenomen op video en tijdens een college dat Van der Blij met mij gaf werd die video vertoond en met de aanwezigen besproken. Zo gaven we, zei Van der Blij, toch wiskunde zoals geëist werd door de inspectie. Het was een creatieve oplossing.

Indertijd kon je aan universiteiten en hogescholen een lesbevoegdheid krijgen voor de vakken die je daar studeerde. Je hoefde daar geen examen voor te doen, maar moest colleges algemene en vakdidactiek volgen. Als bewijs dat je dat had gedaan, moest je tijdens de colleges een handtekening op een aanwezigheidslijst schrijven.
De toenmalige vakdidacticus wiskunde in Utrecht, Lucas Bunt, had ontslag genomen en was naar de Verenigde Staten vertrokken. Van der Blij wilde dat ik zou solliciteren voor de vakdidactiek wiskunde. Ik was toen bijna vijftien jaar leraar en dat was voor hem voldoende garantie. Mijn bezwaar dat ik van wiskundedidactiek als vak eigenlijk helemaal niets wist, werd door hem weggewuifd: 'Dat weet nu nog niemand in Nederland.' Ik werd benoemd bij het toenmalige Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Leraarsopleiding (PDI), opgericht en geleid door Rudi Mossel. Bij het PDI werkten docenten voor algemene didactiek en alle vakdidactieken.

Colleges om van te genieten

Van der Blij, inmiddels was dat voor mij Fred van der Blij geworden, heeft nog meer invloed gehad op mijn carrière. Hij gaf, samen met anderen, voor studenten die leraar wilde worden een college 'achtergronden van de schoolwiskunde' en heeft mij erbij gehaald. Zijn colleges waren een genot. Van de drie kwartier dat een college duurde, besteedde hij steeds een lang begin aan onderwerpen die niet te maken leken te hebben met de inhoud van het college, om het laatste deel te eindigen met het onderwerp, waarbij dan duidelijk werd wat het eerste deel ermee te maken had. Zijn colleges waren vaak zo boeiend dat je soms vergat aantekeningen te maken. Met als gevolg dat je later bij de voorbereiding voor het tentamen niet altijd goed wist hoe de zaken in elkaar zaten. Later is hij, samen met Rudi Mossel, mijn promotor geweest voor mijn doctoraat. Bij het werken aan het doctoraat hebben hij en Rudi Mossel veel geholpen bij de voortgang van het proces en mij behoed voor een paar ernstige fouten in wetenschappelijk onderzoek.
Als laatste in deze lijst van invloeden die Fred van der Blij op mij heeft gehad is er een die heel belangrijk voor me is. We waren allebei op een conferentie in Ede geweest en hij had mij gevraagd met mij, in mijn auto, mee te rijden naar zijn huis in Bilthoven. Tijdens de rit kwamen we in

gesprek en ik vertelde hem over een boek dat ik pas had gelezen van Harry Mulisch. Hij zei dat hij het boek niet kende, maar het op prijs stelde als een vriend van hem zijn aandacht wilde vestigen op een belangrijk werk. Deze min of meer bedekte verklaring van vriendschap maakte me warm en blij. Ik koester het nog steeds als een kostbare herinnering.

Op het eerste gezicht kan het lijken of dit verhaal over mij ging, maar dat is niet zo. Zijn warme en toch steeds bescheiden belangstelling, zijn stimulansen in werk en creativiteit, zijn bereidheid tot luisteren zal niet alleen voor mij geweest zijn. Anderen hebben soortgelijke ervaringen gehad. Mijn verhaal ging niet over mij, maar over de blijdschap die ik heb om hem gekend te hebben, van hem geleerd te hebben en zijn vriendschap te hebben gevoeld.

EEN PROFESSOR MET LERAARSBLOED

Martin Kindt

Ik verwittigde mijn studenten dat ik het volgende college niet aanwezig zou zijn in verband met een belangrijke vergadering. Ik vroeg hen toch gewoon naar de zaal te komen. Mijn college zou daar worden afgespeeld op video. Toen ik onverwacht toch tijd had om de tweede helft van het college-uur aanwezig te zijn kon ik de verleiding niet weerstaan om even te kijken.
Geen student te zien, wel allemaal recorders.

Aldus professor van der Blij tijdens een van zijn boeiende presentaties. 'Si non è vero, è ben trovato[1], zeggen de Italianen. Van der Blij kleurde zijn colleges graag met anekdotes. In september 1963 woonde ik voor het eerst een 'Van der Blij-college' bij. Dat was bij een herorienteringscursus van de CMLW.[2] Ik was toen net benoemd als wiskundeleraar in Wageningen en in het begin van het schooljaar mocht ik met een paar collega's naar Utrecht waar de cursus werd gegeven door de hoogleraren Freudenthal en Van der Blij, een fantastisch duo. Totaal verschillend in stijl en inhoud, maar ze voelden en vulden elkaar zeer goed aan. De colleges werden afgewisseld door practica en werden door ons leraren als zeer inspirerend ervaren. Van der Blij muntte uit door zijn perfecte performance: glashelder, speels en spiritueel. Een jaar later was er weer een cursus in september met op het menu *topologie*. Ik herinner me hoe beeldend Van der Blij begrippen als *(rij)compact* en *samenhangend* behandelde. De open verzamelingen van een overdekking werden voorgesteld als parapluutjes. Het was genieten en van het veelgenoemde 'Van der Blij-effect' heb ik zelf nooit last gehad. Vermoedelijk omdat ik altijd dezelfde avond alles wat hij verteld had nog eens nauwkeurig naploos.

'PROFESSOR VAN DER BLIJ BLEEK EEN ZEER GEDULDIG LERAAR EN SCHROK NIET ALS WAT EEN WEEK EERDER ONTDEKT EN GOED BEGREPEN LEEK, WEER VERGETEN WAS.'

Stukje in de Wiskrant

Zo'n tien jaar later, kwam ik Van der Blij regelmatig tegen op het IOWO[3], waar ik vanaf 1976 werkte. Hij woonde steevast de kaderbijeenkomsten bij en schreef ook stukjes in de (oude) Wiskrant. Anders dan zijn colleges waren die kaleidoscopisch van aard en liet hij veel over aan de lezer om verder uit te puzzelen. Als voorbeeld neem ik een fragment uit een artikel over vectoren.
Een snelheid van 0,8c (c is snelheid van het licht) opgeteld bij een van 0,7c geeft geen snelheid van 1,5c. De speciale relativiteitstheorie leert dat de som van twee snelheden v en w langs dezelfde lijn gelijk is aan $(v + w)/(1 + vw/c^2)$.
Van der Blij zegt dan: u ziet direct dat als $v \leq c$ en $w \leq c$, dan $(v + w)/(1 + vw/c^2) \leq c$.
Zie je dat wel zo direct? Bij een college zou hij misschien gezegd hebben: immers $v + w \leq 2c$ en $1 + vw/c^2 \leq 2$ en zou dan een beetje ondeugend kijken in afwachting van een protest. Zó niet, hoe dan wel? Ik probeer in de huid van Van der Blij te kruipen: 'in de formule komt de som en het product van v en w voor, waar doet dit u aan denken?' Je hoopt dan op 'aan een tweedegraadsvorm' en ja, uit $(c - v)(c - w) \geq 0$ volgt de gewenste ongelijkheid.

Met vier meisjes de wereld rond

In die zelfde tijd werden er op het IOWO pakketjes ontwikkeld die naast of in plaats van hoofdstukken uit het leerboek konden worden gebruikt. Een van die pakketjes was *De reis om de wereld in 80 dagen* dat ik samen met Wim Sweers en tekenaar Theo van Leeuwen had ontworpen. Het was gebaseerd op het beroemde boek van Jules Verne, voor dit doel bewerkt tot een stripverhaal met opdrachten.

Tijd en tijdzones, afstand, snelheid, coördinaten op aarde, dat waren de belangrijkste wiskundige thema's. De tekst werd getest in de onderbouw, van het lager beroeps onderwijs tot en met het gymnasium. Zo kwamen we op een school in Hilversum voor lager huishoud- en nijverheidsonderwijs (lhno) waar de wiskundelerares vier

meisjes uit haar tweede klas afstond. Samen met Van der Blij zat ik een aantal weken met vier leerlingen op een zolder van de school rondom een grote globe, als waren we 'reisleiders'. Ik heb toen alles op bandjes opgenomen, maar helaas zijn die bij een van de verhuizingen van het Freudenthal Instituut verloren gegaan. Wat ik me heel goed herinner is dat professor Van der Blij een zeer geduldig leraar bleek en niet schrok als wat een week eerder ontdekt en goed begrepen leek, weer vergeten was. Hij wist van het naar hem genoemde effect, denkt de lezer nu misschien.

Leerstofprojecten

Van der Blij heeft een invloedrijke rol gespeeld bij de totstandkoming van drie leerstofexperimenten: *Hewet, Hawex en Wiskunde* 12-16 die geleid hebben tot voor die tijd revolutionaire leerplanwijzigingen. Bij voorlichtingsbijeenkomsten was hij aanwezig om steun te geven aan de ontwikkelteams bij het beantwoorden van lastige vragen uit het veld. Inhoudelijk volgde hij het werk met veel belangstelling. Soms stelde hij - voorzichtig – een alternatief idee voor. Zo bespraken we eens een pakketje over differentiaalrekening dat ook voor wiskunde A geschikt moest zijn. De afgeleide van x^n is nx^{n-1}, daar zijn allerlei mooie bewijzen voor. Net als bijvoorbeeld bij de stelling van Pythagoras vind ik dat je ten minste drie heel verschillende bewijzen met de leerlingen zou moeten bespreken.
Het in de figuur hieronder gestarte proces, een schoolvoorbeeld van inductie, geopperd door Van der Blij, zou ik daarbij niet vergeten.

$$n=2 \qquad \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \frac{2xh+h^2}{h} = 2x+h \xrightarrow{h \text{ nadert tot } 0} 2x$$

$$n=3 \qquad \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \frac{x(x+h)^2+h(x+h)^2-xx^2}{h} = x\cdot\frac{(x+h)^2-x^2}{h}+(x+h)^2 =$$

$$\downarrow \; h \text{ nadert tot } 0 \; \downarrow$$

$$x\cdot 2x + x^2 = 3x^2$$

figuur 2

Amice

Net als Freudenthal werd Van der Blij op het werk altijd aangesproken als professor. Zelf was hij de beleefdheid zelve, vouvoyeerde hij consequent en als je een briefje van hem kreeg stond er 'amice' in de aanhef. Dat is in dit e-mailtijdperk nauwelijks voorstelbaar. Hij was ook diplomatiek en dit wierp zijn vruchten af in onderhandelingen met het ministerie. De totstandkoming van het Hawexproject (start in 1987) had heel wat voeten in de aarde. Op het ministerie was men ervan overtuigd dat er in navolging van het vwo ook op havo een wiskunde A naast een wiskunde B moest komen, maar men wilde niet dat er, voorafgaand aan de invoering, een experiment met proefscholen, proefteksten en proefexamens zou plaatsvinden. Wel was er geld beschikbaar voor landelijke nascholing. De opdracht om dit te bewerkstelligen kwam op mijn bordje, maar met veel steun in de rug van Van der Blij weigerde ik dit leeg te eten. Samen zijn we een aantal keren in Zoetermeer geweest en bij een van die gelegenheden veranderde Van der Blij van tactiek en toen heb ik hem voor het eerst boos gezien. Dat maakte indruk, want uiteindelijk kwam het experiment er toch.

Geboren leraar

Ik keer even terug naar 1964 en de cursus topologie in Utrecht. In die tijd was er in de *NRC* dagelijks een aflevering van een Bommelverhaal te vinden. Een van de naar mijn smaak mooiste verhalen van Marten Toonder, *Het monster Trotteldrom* was toen actueel. Het thema was 'massapsychose' en dit kwam tot uiting in gezegden van de inwoners van het eiland Trottel, zoals '*één is géén'.*
Van der Blij was kennelijk een trouwe lezer want hij liet tijdens zijn colleges af en toe achteloos zo'n Trottelse uitdrukking vallen. Een daarvan was; 'laten we wel wezen'. Misschien vertelde hij er ook wel bij dat het uit de krant kwam, dat weet ik niet zo goed meer, maar anders werd het wel herkend door een flink deel van het gehoor. Er werd hoe dan ook smakelijk om gelachen.
Frederik van der Blij begon zijn loopbaan als leraar aan de hbs in Warffum. Ik twijfel er niet aan dat van stond af aan bleek dat hij een geboren leraar was. Nu hij een gestorven leraar is, stemt dat wat triest. Echter, laten we wel wezen: dat hij na een prachtige loopbaan nog heel veel tijd heeft gehad, die gedachte is troostrijk.

FRED VAN DER BLIJ

Jan de Lange

Fred van der Blij was een vriendelijke, innemende, belangstellende man. Niet zo op de voorgrond tredend, maar een goed luisterende, rechtschapen hoogleraar. Echt niets op aan te merken. Het was dan ook een speling van het noodlot dat híj juist directeur van het Freudenthal Instituut was rond 1980. Dat heette toen anders: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs. Vóór 1980 had het een kleine veertig werknemers. En tot dat moment was er nauwelijks tegenwind geweest. Enter Ad Hermes. Ad Hermes was een katholieke wiskundeleraar, die zich via de gemeentepolitiek van Beverwijk in de Tweede Kamer ontwikkelde tot staatssecretaris van Onderwijs en Wetenschappen, belast met basisonderwijs en de verzorgingsstructuur. En dat was nou net het probleem. Ad wilde, nota bene als wiskundeleraar, zich sterk maken voor de SLO, en volgens zijn logica, moest het IOWO overgaan naar de SLO. Die logica stuitte op enige weerstand: een internationaal bekende Amerikaan, Tom O'Brien, startte een protestbrievenactie. En een groot aantal IOWO'ers weigerde de overstap, waaronder schrijver dezes. En van der Blij stak zijn mening op het Ministerie niet onder stoelen of banken. Uiteindelijk werd het IOWO opgeheven, maar het Freudenthal Instituut gered: de afdeling 'Onderzoek' van het IOWO mocht, vijf man groot, overleven binnen de universitaire structuur van de Universiteit Utrecht. Zonder deze dramatische maar achteraf succesvolle en allesbeslissende redding zou het Freudenthal Instituut er nooit geweest zijn. Dat vond van der Blijs voorganger, Hans Freudenthal, ook. Die bleef aan als vrijwilliger. De naam werd OW & OC, later Freudenthal Instituut. Maar Van der Blij werd zwaar gestraft: hij moest persoonlijk die vijf mensen uitzoeken. Ofwel: hij moest een dikke dertig mensen ontslag aanzeggen. Lees nu even de eerste zinnen terug van dit stukje. Later heeft hij zijn opvolger verteld dat dit de lastigste taak van zijn leven was. Dat had hij niet hoeven vertellen. Ik herinner me de enorme spanning die in de gangen hing van de Tiberdreef. Eén voor één werden we opgeroepen. En één voor één kwamen we weer naar buiten. Altijd met bedrukt gelaat: want als jij mocht blijven dan wist je zeker dat er minstens drie anderen dat geluk niet hadden.Het waren sombere dagen. Ook voor de vijf wat gelukkigere vogels. Het is zo goed dat Fred getuige is geweest van, en een grote rol heeft gespeeld in de ongelofelijke opbloei van het instituut, zowel nationaal als internationaal. Dat laatste (internationaal) is volgens hem beslissend geweest voor de groei.

> 'VAN DER BLIJ: DE VRIENDELIJKE HOOGLERAAR DIE ZIJN TANDEN KON LATEN ZIEN ALS DE SITUATIE DAT VROEG.'

We hebben later nog wel eens gelachen om staatssecretaris Hermes en de wet op de Onderwijsverzorging. Van der Blij: de vriendelijke hoogleraar die zijn tanden kon laten zien als de situatie dat vroeg en dan ook nog eens niet weg liep van de verantwoordelijkheid.
Beste Fred: dankzij jou hebben velen een fantastische tijd gehad bij IOWO, OW&OC en Freudenthal Instituut. Gelukkig heb ik je dat herhaaldelijk kunnen laten weten. Nog een keer: BEDANKT!

AFSCHEIDSWOORDEN BIJ DE UITVAART VAN FREDERIK VAN DER BLIJ

Nellie Verhoef

De oneigenlijke figuur op de rouwkaart is u vast niet ontgaan! Hoe zit dat nu? Kan dat wel? Dit waren precies de vragen die professor Van der Blij stelde – je moest meedenken tijdens college. Niemand kon daardoor zó boeien als hij! Ieder zat op het puntje van zijn stoel, maar oh wee – als je thuiskwam: 'Waar ging het nu precies over?' en 'Hoe deed hij dat eigenlijk?'.
Waarom sta ik hier? Niet direct omdat ik van 1968 tot 1973 wis-, natuur-, en sterrenkunde aan de Rijksuniversiteit van Utrecht studeerde, de tijd met boeiende colleges, maar niet makkelijk. Nee, ik sta hier omdat ik hem vooral de laatste tien jaar heb mogen meemaken op een totaal andere manier. Tot die tijd kwam ik hem regelmatig op verschillende manieren telkens weer tegen. Hoe kwam dat zo?
In 1973, aan het eind van mijn studie, ging ik mee naar Rusland met de studievereniging A-Eskwadraat. Van der Blij regelde dat, had contacten. Wij moesten een jaar Russisch leren, want je weet maar nooit... Onvergetelijk was de reis: we gingen naar scholen, bezochten de sterrenwacht, moesten allemaal de bus uit vanwege controle, aten elke morgen aardappelsoep en volgens de jongens zat er afluisterapparatuur in de hoeken van de hotelkamers, gingen naar het theater en aten kaviaar in St Petersburg en Moskou. Het was september en grijs: veel armoede, openbaar drankmisbruik – je voelde je voortdurend bespied. Ik was het enige meisje en moest

van hem kleding passen die hij wilde meenemen voor één van zijn dochters. In de jaren na mijn studie, als docent wiskunde, kruisten zich onze paden regelmatig. Ik kwam zelfs bij hem thuis in Bilthoven – een mooie statige straat: je voelde dat hier de professor moest wonen. In huis leken de wiskundige objecten voor mij eindeloos uitdagend en prachtig om te zien ook. Ons gesprek ging over wiskunde en kunst – wiskunde is adembenemend mooi, juist als je het in de werkelijkheid niét kunt zien. Op de Nationale Wiskunde Dagen waren zijn lezingen favoriet: bomvolle zalen waarin het gehoor genoot van zijn, altijd weer uitdagende, voordrachten.

'ANDEREN TROKKEN ZICH ZICHTBAAR OP AAN ZIJN RUST, EN UITEINDELIJK DE ÉCHTE ZEKERHEID.'

Maar toen.
Omstreeks 2008 fietste ik door het dorp, en keek... wat? Zie ik daar echt Van der Blij? Ik keer om, loop erheen... professor wat doet ú hier? Nou, hij woonde hier tijdelijk in het carehotel, zijn vrouw moest herstellen ... nou, dan zullen we elkaar vast nog wel eens tegenkomen... Een jaar later kwam ook mijn moeder terecht in het carehotel. Zij hield me bij voortduring nauwgezet op de hoogte van het wel en wee van de professor. Na het overlijden van Ingetje, maande moeder mij aan vooral ook bij Van der Blij langs te gaan – en dat deed ik. Ze woonden vlak bij elkaar. Mijn moeder overleed begin 2010. Ik bleef Van der Blij bezoeken. We hadden het over van alles, maar steeds meer over de betekenis van het geloof in je leven. Hij liet mij zijn favoriete gedichten zien, hij vertelde van zijn ontmoetingen met Nijmeegse rooms-katholieke vrienden. Hij was geïnteresseerd in die voor hem vaak onbekende gedachtegangen. In die tijd werd mij vanuit de kerk gevraagd de geestelijke zorg voor de bewoners van het carehotel op me te nemen. Ik besprak dat met Van der Blij. Hij zei: weet je wat? Begin interconfessionele groepsgesprekken, en let op: 'wél interconfessioneel, niet alleen protestant'. Tja, daar zit je dan – ok, dat doe ik. Zo hadden we jarenlang maandelijkse gesprekken beginnend met een bijbelgedeelte, een lied of een gedicht (groot uitgeprint met illustratie die het geheel onderstreept) eindigend met een gebed – altijd dezelfde vorm, altijd de tweede woensdag in de maand. Toen leerde ik hem op een andere manier kennen: scherp lezend, voorzichtig formulerend, bescheiden - maar altijd midden in de roos. Het ging er soms emotioneel aan toe: twee zeer oude (boven de 100) getrouwe protestanten, goed uit hun woorden komend met een zekerheid die je zelden meer ziet, tegenover de katholiek (eind negentig) met zo'n zachtheid in woord en daad dat de felle protestanten wat gingen inbinden. Wat kon Van der Blij hiervan genieten – hij zei niets, totdat het stil werd: en dan kwam de clou! Bijvoorbeeld: geloven is vertrouwen...
En dat was precies zijn leidraad. Hoe vaak gingen de gesprekken niet over de tijd die je nu hebt om terug te denken aan alles wat was? Wat had je anders, beter kunnen doen? Het vooruitzicht is het einde van het leven hier op aarde. Hij was er niet bang voor, gelukkig deelde hij dat, welbespraakt als hij bleef. Anderen trokken zich zichtbaar op aan zijn rust, en uiteindelijk de échte zekerheid. Daarvoor wil ik mijn dierbare professor echt bedanken: die ingebedde rust is om nooit te vergeten.
Ik eindig met het lied dat we samen op hun verzoek wilden lezen en waar het maar niet van kwam... 'een mens te zijn op aarde'. Het is een lied van Huub Oosterhuis dat hij schreef voor een vriend van wie de moeder overleden was. Immers, de mens is geboren om te sterven. De dood gaat met ons mee en komt lang verwacht.

Noten

[1] Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde; zie bijvoorbeeld: *Euclides*, jaargang 37 (1961-1962), nummer 5.
[2] De Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde was in 1961 geïnstalleerd door de staatssecretaris van Onderwijs. Een van de opdrachten was om de in functie zijnde leraren in de gelegenheid te stellen zich te oriënteren op de nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde. Van der Blij en Freudenthal waren leden van de commissie.
[3] Instituut Ontwikkeling Wiskundeonderwijs, opgericht in 1971 en voorloper van het Freudenthal Instituut.

Over de auteurs

Joop van Dormolen was leraar en docent aan een lerarenopleiding. Hij publiceerde in 1974 het boek *Didactiek van de wiskunde*, waarmee het fundament van de Nederlandse wiskundedidactiek werd gelegd.
Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leer-planontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. Jan de Lange was hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut en is nu directeur van de Young Parents Academy.
Nellie Verhoef is universitair docent bij de lerarenopleiding van de Universiteit van Twente (ELAN).

GEOGEBRA ALS VERVANGING VAN DE GRAFISCHE REKENMACHINE

Irene van Stiphout
Ivo Claus
Jos Remijn

Het gebruik van de grafische rekenmachine staat onder druk. Op zoek naar alternatieven heeft Cito onderzoek gedaan naar het gebruik van GeoGebra bij toetsen in plaats van de grafische rekenmachine. De ervaringen van leerlingen en docenten zijn positief. Een verslag van Irene van Stiphout, Ivo Claus en Jos Remijn.

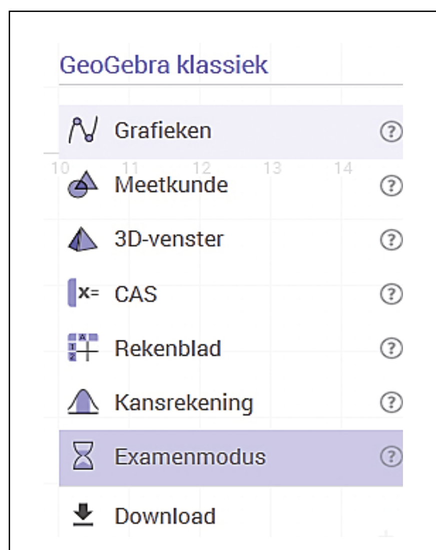
Inleiding

Met de invoering van de Tweede Fase heeft de grafische rekenmachine (GR) een plek gekregen in het wiskunde-onderwijs. Regelmatig is er kritiek te horen op de GR. Zo is de techniek bijvoorbeeld verouderd in vergelijking met computersoftware en smartphones. Het apparaat is relatief duur omdat het bij andere vakken niet (meer) wordt gebruikt en omdat het soms moet worden gekocht naast een tablet of laptop die leerlingen moeten aanschaffen. Daarnaast zijn er bezwaren vanuit Cito en het College voor Toetsen en Examens (CvTE), omdat verschillende mogelijkheden om applicaties te downloaden eerlijke toetsing in de weg kunnen staan.
Inmiddels komen er alternatieven beschikbaar voor de GR in de vorm van applicaties voor tablets, smartphones en laptops. Zulke software kan vaak meer, is sneller en intuïtiever dan de GR. Een voorbeeld hiervan is het gratis programma GeoGebra.[1]

Begin 2017 heeft CvTE daarom een werkgroep opdracht gegeven om te kijken in hoeverre GeoGebra een vervanging kan zijn voor de GR. In dezelfde periode is Cito een onderzoek gestart naar de vraag in hoeverre GeoGebra de rol van de GR zou kunnen overnemen in de toetspraktijk van havo en vwo. Aan dat onderzoek hebben iets minder dan 200 vwo-leerlingen met wiskunde A of wiskunde B van vier verschillende scholen meegedaan. Deze scholen hebben eigen toetsen afgenomen waarbij leerlingen niet de GR maar GeoGebra tot hun beschikking hadden. Op twee scholen wordt gewerkt op *Chromebooks*, de twee andere scholen hanteren een *Bring-Your-Own-Device* (BYOD) beleid. Dat betekent dat de leerlingen over verschillende typen devices beschikken, al had het merendeel van de leerlingen een laptop met Windows.

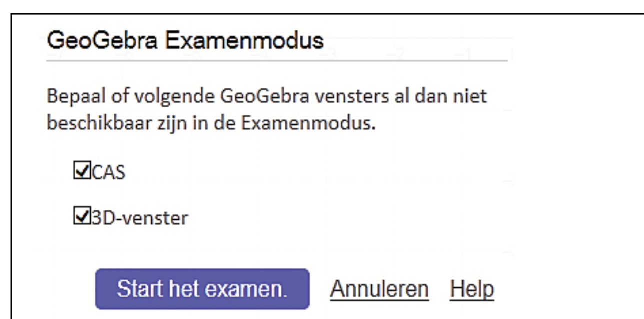
Examenmodus van GeoGebra

GeoGebra kan online en via een te downloaden versie worden gebruikt. Na het openen van de website kan uit verschillende pakketten gekozen worden. De volledige versie van GeoGebra met mogelijkheden in algebra en meetkunde heet GeoGebra Klassiek.[2] Na het openen van GeoGebra Klassiek verschijnt een menu met keuzemogelijkheden, zie figuur 1. Dit menu is ook te vinden onder de knop in de blauwe balk rechts bovenin, door te kiezen voor het kopje 'schermindelingen'. In dat menu kan gekozen worden voor de examenmodus.



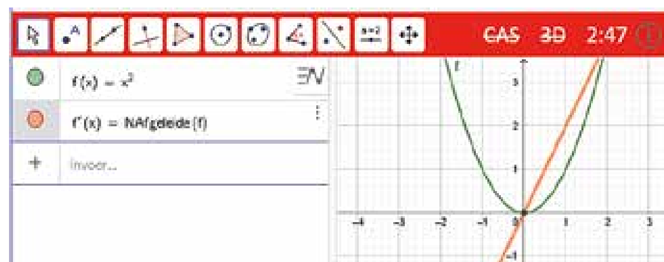
figuur 1 Openingsscherm van GeoGebra met de keuze voor de examenmodus

Na het aanklikken van de examenmodus verschijnt een keuzevenster met mogelijkheden voor computer-algebra-systeem (CAS) en een 3D-venster, zie figuur 2.



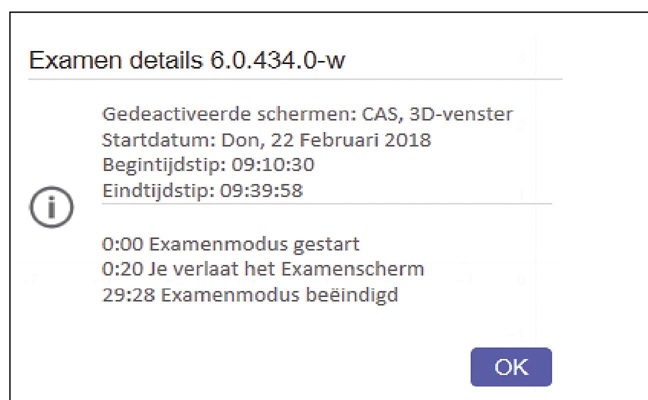
figuur 2 Keuzevenster voor de opties CAS en 3D

Door de beide opties uit te zetten, hebben leerlingen toegang tot mogelijkheden die vergelijkbaar zijn met die van de grafische rekenmachine. Door de CAS-optie uit te zetten wordt bijvoorbeeld voorkomen dat GeoGebra de formule van de afgeleide in beeld zet. De grafiek van de afgeleide wordt wel getekend als de leerling *f'* intypt in het algebravenster, maar het bijbehorende functievoorschrift niet, zie figuur 3.
Het venster van de examenmodus van GeoGebra vult het hele scherm. De bovenste lichtblauwe knoppenbalk kleurt felrood als leerlingen uit de examenmodus van GeoGebra gaan. De rode balk is heel opvallend voor surveillanten die achterin de klas staan, zie ook figuur 3.



figuur 3 Examenmodus in GeoGebra: geen functievoorschrift van *f'*(x), de duur van de examenmodus (2:47), CAS en 3D en de rode balk

In oudere versies kunnen leerlingen de examenmodus verlaten door op Escape te drukken. In nieuwere versies moet hiervoor de optie 'examenmodus afsluiten' worden aangeklikt in het menu rechtsboven in het scherm.
Behalve het verschijnen van de rode balk is er nog een mogelijkheid om te controleren of leerlingen uit de examenmodus zijn gegaan: in de balk bovenin het scherm is te zien hoe lang een leerling in de examenmodus zit, zie figuur 3. Daarnaast houdt GeoGebra een logboek bij met deze gegevens. Dit kan door de surveillant worden bekeken, zie figuur 4.



figuur 4 Het logboek dat in beeld komt nadat de examenmodus is verlaten. In dit voorbeeld is te zien dat de examenmodus tussendoor is verlaten

De examenmodus is nog volop in ontwikkeling. Zo is gewerkt aan oplossingen voor het per ongeluk verlaten van de examenmodus door het indrukken van Escape of ALT-tab. Ook is er ontwikkeling in het gebruik van GeoGebra op Android smartphones, waarbij de blokkering nu al goed werkt: slechts door uit- en inschakelen kan de examenmodus verlaten worden. De huidige algemene examenmodus van GeoGebra is zeer bruikbaar voor bijvoorbeeld overhoringen, proefwerken en schoolexamens. Voor centrale eindexamens is deze (nog) niet veilig genoeg. Voor het afnemen van toetsen is het aan te raden om de gedownloade versie te gebruiken. De onlineversie verandert snel en kan daarom zorgen voor verschillen in functionaliteit tussen het moment van oefenen en de afname van een toets.

Ervaringen van leerlingen

Het belangrijkste resultaat van dit onderzoek is dat leerlingen nauwelijks problemen ervaren met GeoGebra. Het opstarten, uitvinken van de CAS- en 3D-optie is geen probleem. Tijdens de afnamen hadden leerlingen nauwelijks vragen over de werking van GeoGebra. Gevraagd naar een voorkeur voor de GR of GeoGebra bleek dat leerlingen de voorkeur geven aan wat ze gewend zijn. Harde cijfers om te vergelijken zijn niet verzameld, omdat de verschillen tussen scholen te groot waren en de aantallen leerlingen te klein. Als voordelen van GeoGebra werden genoemd dat het makkelijker is om in- en uit te zoomen en dat het dus niet nodig is om het *window* in te stellen. Als nadelen van het gebruik van GeoGebra werden genoemd dat een laptop veel plaats inneemt op de tafel en dat het wennen is als de GR al bekend is.

Ervaringen van docenten

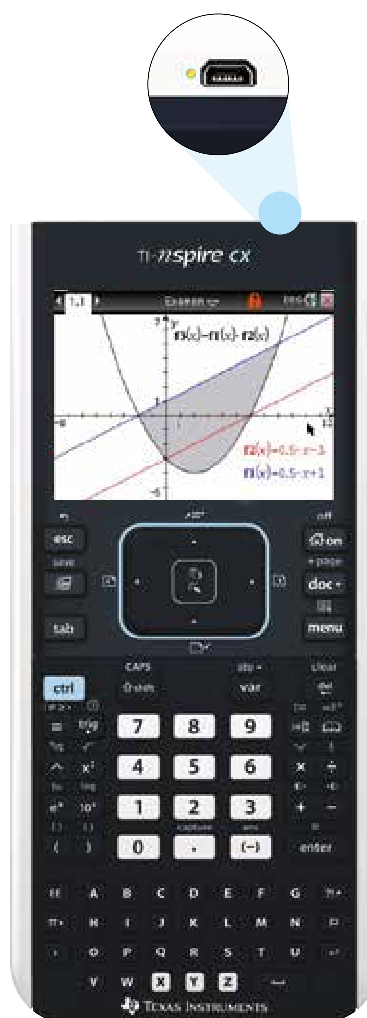
De ervaringen van docenten zijn bekeken ten aanzien van de organiseerbaarheid, het verloop van de afname en ervaringen bij de correctie.

Organiseerbaarheid
Op twee van de vier scholen hebben leerlingen in de vierde klas *niet* de beschikking over een grafische rekenmachine en wordt in de les met GeoGebra gewerkt. Dat betekent dat er voor het afnemen van de toets geen speciale voorbereiding is geweest. In de les voorafgaand aan de toets is aandacht besteed aan de examenmodus en het uitvinken van CAS en 3D. Deze leerlingen hadden verder geen vragen over de werking van GeoGebra. De andere twee scholen hanteren een BYOD beleid. Dat betekent dat de leerlingen over verschillende typen devices beschikken, al had het merendeel van hen een laptop. In alle vier de scholen werd de onlineversie van de examenmodus van GeoGebra gebruikt. Voor de toetsen zijn geen speciale voorzieningen getroffen ten aanzien van de capaciteit van de draadloze netwerken. Op geen enkele school zijn wifi-problemen geweest tijdens de afname van

De Nederlandse examenstand. Nu beschikbaar.



TI-84 Plus CE-T

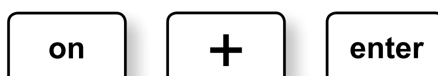


TI-Nspire CX



Alle instellingen volledig klaargezet voor het Nederlandse wiskunde-examen.

Stel de examenstand in met





education.ti.com/nederland

de toetsen. De toetsen zijn afgenomen in reguliere lokalen die geen speciale voorzieningen hadden wat ict betreft. Leerlingen van de scholen met Chromebooks en BYOD zijn gewend ervoor te zorgen dat de batterij van hun device is opgeladen, dus stroomvoorziening was niet nodig. Leerlingen zien gemakkelijk de schermen van de leerlingen die voor hen zitten. Zeker als een leerling schuin achter een andere leerling zit, heeft hij goed zicht op het scherm van die andere leerling. Zie de foto in figuur 5. Van die afstand zijn alleen de grafieken zichtbaar, niet de bijbehorende formules. Geen van de betrokken docenten van deze vier scholen ervoer dit als een probleem.



figuur 5 Leerlingen aan het werk met GeoGebra tijdens de toets

Tijdens de afname
De afnamen zijn overal vlot verlopen, al was er een aantal incidenten. Bij de eerste afnamen ging de computer, na enige tijd niet te zijn gebruikt, in de stand-by-modus met als gevolg dat GeoGebra uit de examenmodus ging en de balk rood kleurde. Later is als instructie meegegeven aan leerlingen om in te stellen dat de computer pas na een uur op stand-by gaat. Tijdens de afnamen drukten enkele leerlingen per ongeluk op Escape waarna de rode balk verscheen. Dit kon snel verholpen worden door opnieuw op te starten. In de nieuwere versies van de examenmodus kunnen leerlingen niet meer via Escape uit de examenmodus. Een enkele keer ging GeoGebra spontaan uit de examenmodus. Het verdient aanbeveling de afspraak met leerlingen te maken dat zij direct hun vinger opsteken als de rode balk verschijnt. Wat betreft de surveillance werden er geen problemen gemeld door docenten.
Vanuit een positie achterin de klas is uitstekend te zien of schermen een rode balk krijgen. Het controleren van de logboeken kost nogal wat tijd, waardoor het einde van de toets wat rommelig kan worden, omdat leerlingen moeten wachten op de controle. Het is sneller om te kijken naar de tijd die in de balk in GeoGebra wordt weergegeven waarin te zien is hoe lang leerlingen in de examenmodus zitten, zie figuur 3. Het probleem dat de examenmodus wordt onderbroken als computers in de stand-by-modus gaan, is besproken met de ontwikkelaars van GeoGebra. De precieze stand van zaken wat dit betreft is bij het schrijven van dit artikel (februari 2018) niet bekend.

Ervaringen na de correctie
Docenten is gevraagd in hoeverre zij verschillen hebben waargenomen in de uitwerkingen van leerlingen in vergelijking met eerdere, vergelijkbare toetsen die met de grafische rekenmachine zijn afgenomen met betrekking tot bijvoorbeeld tijd, moeilijkheid, problemen met vraagstellingen etcetera. Hierop is weinig respons gekomen. Het beeld dat uit de reacties naar voren komt, is dat er geen verschillen zijn. Eén docent zag dat leerlingen vaker hun antwoorden controleerden bij het gebruik van GeoGebra.

Conclusie

De vraag die in dit onderzoek centraal stond, is in hoeverre GeoGebra de rol van de GR zou kunnen overnemen in de toetspraktijk in havo en vwo. De eerste ervaringen met het toetsen met GeoGebra zijn positief. De toetsen zelf hoeven niet te worden aangepast, omdat de examenmodus van GeoGebra ongeveer dezelfde mogelijkheden biedt als de GR. Leerlingen wennen snel aan GeoGebra. De docenten van de betrokken scholen zijn positief, omdat de organisatie van het afnemen van toetsen met GeoGebra vlot is verlopen.

Docenten die belangstelling hebben om toetsen af te nemen met GeoGebra en vragen hierover hebben, kunnen contact opnemen met Jos Remijn.

Noten

[1] Zie *www.geogebra.org*
[2] De ontwikkeling van GeoGebra gaat snel. In dit artikel is de stand van zaken in februari 2018 beschreven.

Over de auteurs

Irene van Stiphout is lerarenopleider bij de Hogeschool Arnhem Nijmegen en toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *irene.vanstiphout@cito.nl*
Ivo Claus is toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *ivo.claus@cito.nl*
Jos Remijn is toetsdeskundige bij Cito.
E-mailadres: *jos.remijn@cito.nl*

DIDACTIEKCOLLEGE OVER TELPROBLEMEN

Saskia van Boven
Gerrit Roorda

Leerlingen in klas 4 met wiskunde A vinden combinatoriek een lastig onderwerp, zo leert de ervaring. Dit was voor Saskia van Boven en Gerrit Roorda, beiden docent wiskundedidactiek aan een universitaire lerarenopleiding, de aanleiding om hierover gezamenlijk een college vakdidactiek te ontwerpen zodat studenten gevoel kunnen ontwikkelen voor het onderwijzen van telproblemen.

Wat is een goed college vakdidactiek?

Reguliere studenten in de universitaire lerarenopleiding hebben als vooropleiding een studie wiskunde gevolgd. Het jaar lerarenopleiding bestaat vervolgens uit veel stagelopen (ervaring opdoen in de klas) en colleges over vakdidactiek en onderwijskunde. Dat zorgt voor een aantal uitdagingen binnen onze colleges vak-didactiek. We willen onze studenten op metaniveau leren nadenken over vakdidactiek, maar de studenten hebben vooral behoefte aan dat wat ze meteen in hun lessen kunnen gebruiken. Ons doel was een college te ontwerpen waarin studenten ontdekken wat leer-problemen van leerlingen bij een onderwerp zijn, en daarnaast ideeën krijgen over hoe je dit (meteen) kunt onderwijzen. We kozen voor combinatoriek, omdat dit vaak als lastig onderwerp wordt ervaren door leerlingen, maar ook door studenten.

College over combinatoriek

We hebben het college verdeeld in vier fasen, namelijk: (1) studenten ervaren zelf hoe ze telproblemen oplossen, (2) studenten expliciteren welke stappen ze hebben genomen, (3) wij vertellen theorie over de didactiek van telproblemen en (4) we bespreken wat dit betekent voor hun onderwijs. Het college is gegeven aan studenten van de universitaire lerarenopleiding, studenten van de hbo-vakmaster van de HAN en de NHL, en een gedeelte ervan ook aan twee groepen meer ervaren docenten.

Fase 1: Ervaren

De studenten kregen twee telproblemen voorgelegd die ze hardop denkend in tweetallen moesten oplossen. Een derde student observeerde het oplossingsproces. Het hardop denken was bedoeld om oplossingsstrategieën van studenten boven tafel te krijgen. In het kader staan de twee telproblemen die we hebben gebruikt. Het is handig als je eerst zelf nadenkt over deze opdrachten alvorens verder te lezen.

Probleem 1: logeren bij oma
Vier kinderen: Alice, Bert, Carol en Diana gaan bij hun oma logeren. Ze heeft twee verschillende slaapkamers beschikbaar (een op de eerste verdieping en een op zolder) waarin ze een of meer kinderen kan laten slapen. Op hoeveel verschillende manieren kan oma de kinderen over de twee slaapkamers verdelen? Ze kan bijvoorbeeld Alice, Bert en Carol op de eerste verdieping leggen en Diana op zolder, maar ze kan ook alle kinderen in een slaapkamer leggen.
(bron Batanero e.a., 1997)

Probleem 2: sjoelbak
In een sjoelbak zitten vier delen waar je stenen in kunt schuiven om punten te verdienen. In een spelletje met vijf stenen lukt het een sjoeler om de vijf stenen in een vakje te schuiven. Hoeveel verschillende situaties kunnen er aan het einde van dit spelletje zijn?
(bron Coenen & Timmer, 2015)



figuur 1 Sjoelbak

Allerlei verschillende manieren van werken die je ook in een klas kunt zien waren in de colleges zichtbaar. *Groepswerk* in allerlei soorten en maten: van echt overleg in een duo, naar twee solisten die liever alleen werken. Verschillende *houdingen:* niet zoveel zin om na te denken;

vastbijten in het probleem, indekken ('heb vannacht niet goed geslapen'), dichtklappen ('ik ben nooit zo goed in telproblemen geweest'). Verschillen in *basiskennis:* studenten met een master wiskunde die nog nooit over combinatoriek hebben nagedacht, studenten die dit één keer in de klas hebben uitgelegd, of studenten die al jaren bijles geven en dit al vaak hebben uitgelegd.

Logeren bij oma bleek voor de meeste studenten goed te doen, maar leverde ook veel discussies op. Sommige studenten schreven alle mogelijkheden uit, zie figuur 2, anderen maakten een tabel met alle verdelingen (verdeling zolder- 1e verdieping: 4-0; 3-1; 2-2; 1-3; 0-4) met achter elke verdeling het aantal mogelijkheden. Dit uitschrijven leverde bij de meeste groepjes de uitkomst 16 op. Sommige groepen gaan snel door naar de volgende opdracht, anderen merken opeens op dat 16 ook precies 2^4 is. 'Oh, ja je hebt voor elk kind twee keuzes'.

figuur 2 Uitwerking van een student

De opdracht *Sjoelbak* zorgt voor meer problemen. Een veel voorkomende oplossing was 4^5 (zie bijvoorbeeld figuur 3: elke steen kan in vier vakjes komen en er zijn vijf stenen). Sommige studenten schreven direct dit antwoord op, maar dachten vervolgens niet meer na over de correctheid van het antwoord.

figuur 3 Uitwerking van het sjoelbakprobleem

Verdeling van de stenen	Notatie	Aantal manieren
Vijf in één vak, rest leeg	5-0-0-0	4
Vier in één vak, één in ander vak	4-1-0-0	12
Drie in één vak, twee in ander vak	3-2-0-0	12
Drie in één vak en twee vakken met één	3-1-1-0	12
Twee keer twee en één los	2-2-1-0	12
Twee in één vak en in drie vakken één	2-1-1-1	4
Totaal		56

tabel 1 Mogelijke verdelingen van stenen over de vier vakken

Andere studenten merkten dat er iets niet klopt: *'de volgorde 1-3-1-1-3 levert toch dezelfde verdeling van stenen in de vakjes op als 3-3-1-1-1? Dan kan het toch niet zijn!'* Ze beten zich vast in het probleem. De manier van werken die bij enkele groepen tot succes leidde was het uitschrijven van alle mogelijkheden, zie tabel 1.

Een ervaren docent merkt op: 'Ik heb dit een keer uitgelegd aan klas vwo wiskunde D. Het ging over herhalingscombinaties. Maar ik ken de formule niet meer precies.' Een student herkende onmiddellijk het eierverfprobleem en loste het probleem op met de formule. Een mooie uitleg hierover is te vinden op de website van H. Hofstede bij de module *'Eieren verven'.*

Fase 2: Expliciteren

Terwijl de tweetallen de problemen probeerden op te lossen was er een derde student die het oplossingsproces observeerde. Verschillende oplossingsstrategieën werden benoemd:

- Systematisch uitschrijven (zie bijvoorbeeld figuur 1)
- Schematiseren (zie bijvoorbeeld figuur 3)
- Proberen het probleem te koppelen aan een al bekend probleem (bijvoorbeeld het eierverfprobleem)
- Denken vanuit een telmodel (bijvoorbeeld combinatie) en onderzoeken of het probleem valt op te lossen met dit telmodel
- Zomaar wat proberen en hopen dat je dan structuur ontdekt

- Het probleem verkleinen (dit kwam overigens nauwelijks voor, behalve bij een groep waar we het sjoelbak probleem hadden aangepast naar 15 stenen)
- Controles uitvoeren (wat verrassend vaak niet werd gedaan)

Zowel de studenten als de ervaren docenten gaven aan nu beter in te voelen wat leerlingen in het vo ervaren. Als je niet weet met welk soort telprobleem je te maken hebt, dan heb je een manier nodig om dit te onderzoeken. Leerlingen hebben deze benodigde onderzoeksvaardigheden vaak niet (geleerd) en ze komen ook niet expliciet aan de orde in de boeken. Het lijkt dus zinvol om in de wiskundeles meer aandacht te besteden aan deze oplossingsstrategieën. Dit zou bijvoorbeeld kunnen door de telproblemen van begin af aan door elkaar aan de orde te stellen.

Fase 3: Theorie

In deze fase presenteerden we enkele gegevens uit artikelen over combinatoriek. Hier geven we een aantal voorbeelden van achterliggende theorie.
Lockwood (2011) en Batanero (1997) geven een categorisering van telproblemen zoals weergegeven in tabel 2. Voor studenten in de lerarenopleiding is dit overzicht meestal nieuw. De drie gekleurde vakken zijn onderdeel van het wiskunde A schoolcurriculum, het vierde vak komt soms bij wiskunde D aan de orde. Lockwood beschrijft het interessante fenomeen dat sommige leerlingen tijdens het maken van een bepaald probleem refereren aan een eerder gemaakt probleem. Ze herkennen de overeenkomst tussen de verschillende probleemtypes. Dit zou een aanwijzing kunnen zijn voor het onderwijzen: het gesprek met leerlingen waarin opdrachten met elkaar worden vergeleken en overeenkomsten en verschillen worden besproken.

Een tweede theoretische achtergrond is voor de meeste studenten ook verrassend. Batanero (1997) maakt onderscheid tussen verschillende typen telproblemen: selecties, partities en distributies. In tabel 3 staan drie voorbeeldopdrachten bij elk type telprobleem. Studenten die al enige leservaring hebben beantwoordden de eerste vraag (selecties) snel met het antwoord ‘5 boven 2’. Bij de tweede vraag (partities) blijft het meestal langer stil, totdat iemand opmerkt: ‘dat is ook 5 boven 2’ . De derde vraag blijkt vervolgens ook lastig. In het onderzoek van Batanero lijken leerlingen beter te scoren op ‘selectievragen’ dan op partitie- en distributievragen.

Type	Kenmerk	Voorbeeld
Selecties	Selecteer *r* objecten uit *n*	Je hebt vijf kinderen en selecteert twee die je mogen helpen. Op hoeveel manieren kun je twee selecteren?
Partities	Verdeel *n* objecten in twee groepen met *r* en *n* – *r* objecten	Jan en Piet hebben vijf grote knikkers van verschillende kleuren. Aan het eind van de dag verdelen ze de knikkers, Jan krijgt er twee, Piet drie. Op hoeveel manieren kan dat, gelet op de kleur?
Distributies	Verdeel *r* objecten over *n*	Twee identieke prijzen worden uitgedeeld aan vijf kinderen. Eén kind kan maximaal één prijs krijgen. Op hoeveel manieren kunnen de prijzen verdeeld worden over de kinderen?

tabel 3 Kenmerken van selecties, partities en distributies met voorbeelden

Leuk om hierbij te vermelden is ook dat Timmer en Verhoef (2014) op basis van een *Lesson Study* les in havo 4 concluderen dat leerlingen zich echt een beeld van de situatie moeten vormen voordat er teruggegrepen wordt op formules. Een telprobleem dat visueel wordt gepresenteerd heeft daarbij een positief effect. In figuur 4 zie je bijvoorbeeld een visuele variant van de tweede vraag uit tabel 3.



figuur 4 Jan en Piet verdelen vijf gekleurde knikkers. Jan krijgt er twee, Piet drie

	Volgorde van belang (permutaties)	Volgorde niet van belang (combinaties)
Zonder herhaling	$\frac{n!}{(n-r)!}$	$\binom{nr}{n}$
Met herhaling	n^r	$\binom{n+r-1}{r}$

tabel 2 Selecties van *r* objecten uit *n* verschillende objecten

Sommige studenten geven aan dat ze deze theoretische achtergronden waarderen, terwijl anderen zeggen dat al deze informatie wat veel is.

Fase 4: Betekenis voor onderwijs

Door onze studenten aan te sporen hun oplossingsstrategieën expliciet te maken gingen ze nadenken over wat er in de schoolboeken aan de orde komt. In de nieuwste editie van *Getal & Ruimte* staan aan het eind van het hoofdstuk de volgende aanwijzingen voor leerlingen.

Bij het oplossen van telproblemen vraag je jezelf het volgende af:
- Is de volgorde van belang?
- Zijn herhalingen toegestaan?
- Heb je te maken met een permutatie of met een combinatie, of moet je systematisch noteren?
- Moet je optellen of vermenigvuldigen?

Uit: *Getal & Ruimte (vwo wiskunde A)*

Studenten gaven aan dat dit blokje voor henzelf niet behulpzaam zou zijn geweest bij het oplossen van de telproblemen uit het college, waarna onmiddellijk de vraag opkwam in hoeverre dit soort aanwijzingen behulpzaam is voor leerlingen.
We vroegen onze studenten dit blokje te herschrijven, passend bij de manier waarop zij zelf telproblemen aanpakken of naar aanleiding van andere input uit het college. Veel aanpakken begonnen met suggesties om het probleem eerst te schematiseren, mogelijkheden uit te schrijven. Pas nadat je goed inzicht gekregen hebt in het probleem kun je zoeken naar snellere methoden. Tegelijkertijd kwamen we met elkaar tot de conclusie dat er geen snelle trucs zijn om leerlingen telproblemen te leren oplossen. De enige manier om verder te komen is 'nadenken' en onderzoeken. Misschien is dat wel de belangrijkste stap waar de leerlingen steeds op gewezen moeten worden!

Conclusie

Was dit nou een goed college vakdidactiek? We hebben in elk geval de indruk dat de meeste studenten, maar ook de ervaren docenten die dit college meemaakten, geïnteresseerd bezig waren. De indeling in vier telmodellen was voor de meeste studenten onbekend. Ook de indeling in verschillende typen telproblemen was nieuw. Herhalingscombinaties waren voor de meesten onbekend. We denken dat we hiermee hebben bijgedragen aan vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van de deelnemers. Het zelf ervaren van de manier waarop je telproblemen aanpakt, werd door de meeste studenten en docenten gewaardeerd. 'Ik besef nu weer hoe lastig dit eigenlijk voor leerlingen is en hoe ze dan in de klas zitten'. Tegelijkertijd merkten we dat studenten graag nog meer handvatten willen: Hoe doe je dat nu precies in een les, leerlingen over een probleem laten nadenken? Een student schreef in de evaluatie: 'Is de conclusie dat het een lastig onderwerp is waarbij niet één methode is die alles 'dekt'?'
Een vraag die voor ons uitdagend blijft: Hoe helpen we de studenten verder bij het geven van vakdidactisch sterke lessen van 'elke dag'?

Literatuur

- Batanero C. et al. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 181–199
- Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics, 78*(3), 307-322.
- Polya, G. (1945). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton: Princeton University Press.
- Timmer, M. & Verhoef, N.C. (2014) Combinatoriek: meer dan trucjes. *Euclides, 90*(3), 12-13.
- Coenen, T. & Timmer, M. (2015). Presentatie op de eerste landelijke *Lesson Study* conferentie, Amsterdam.
- Op de conferenties ELWIER-2017 en NWD-2108 hebben Gerrit en Saskia een workshop gegeven over combinatoriek.

Link

Over het eierverfprobleem, zie:
http://www.hhofstede.nl/modules/eierenverven.htm

Over de auteurs

Saskia van Boven is vakdidacticus wiskunde bij de lerarenopleiding van de Radboud Docenten Academie.
E-mailadres: *s.vanboven@docentenacademie.ru.nl*
Gerrit Roorda is vakdidacticus wiskunde bij de lerarenopleiding van de RUG en de NHL.
E-mailadres: *g.roorda@rug.nl*

UITDAGENDE PROBLEMEN

DE FACEBOOK INTEGRAAL

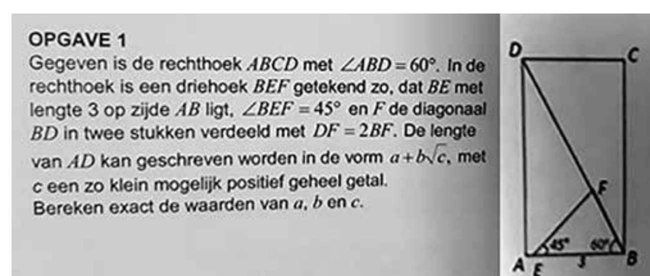
Jacques Jansen

Facebookgroep *Leraar Wiskunde* – meer dan 3500 leden - is rijk aan puzzels, video's, afbeeldingen, vragen, antwoorden, discussies enzovoort. Via dit medium kan er snel gereageerd worden. Dit vaktijdschrift is echter uitstekend geschikt om dieper in te gaan op discussies over didactische problemen. Jacques Jansen richt zich op twee opgaven.



Voorbeeld 1 Exact of niet?

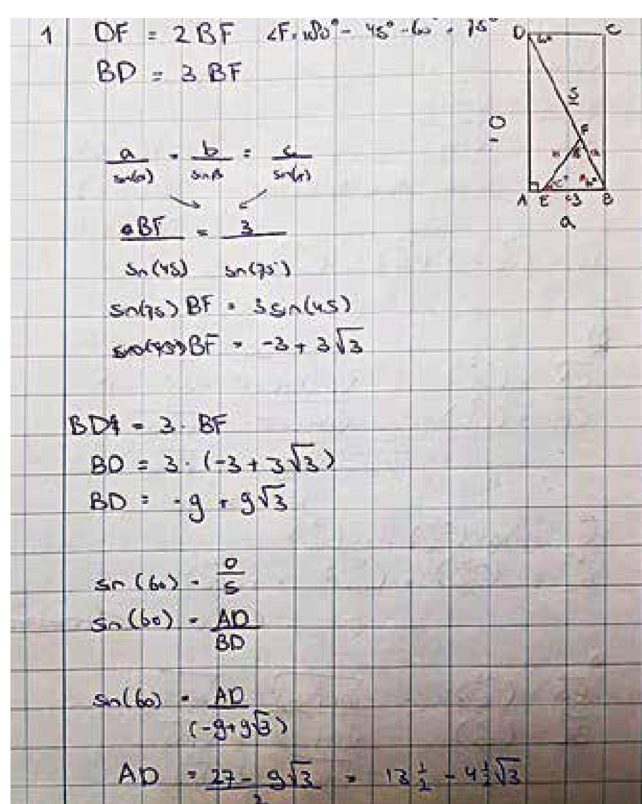
Er ontstond een levendige discussie over een opgave voor 6 vwo uit *Getal & Ruimte*, zie figuur 1. Bijvoorbeeld: 'Is de opgave wel goed geformuleerd?' Het ging ook over een uitwerking van een leerling. Hoe komt die leerling aan het antwoord $BF = -3 + 3\sqrt{3}$? Heeft hij of zij slim gebruik gemaakt van de rekenmachine? Hoe moeten we dan normeren?



OPGAVE 1
Gegeven is de rechthoek $ABCD$ met $\angle ABD = 60°$. In de rechthoek is een driehoek BEF getekend zo, dat BE met lengte 3 op zijde AB ligt, $\angle BEF = 45°$ en F de diagonaal BD in twee stukken verdeeld met $DF = 2BF$. De lengte van AD kan geschreven worden in de vorm $a + b\sqrt{c}$, met c een zo klein mogelijk positief geheel getal.
Bereken exact de waarden van a, b en c.

figuur 1 Opgave uit *Getal & Ruimte*, 6 vwo

Het zal je snel duidelijk zijn. Het draait natuurlijk om de hoogte van punt F. Laten we die hoogte h noemen. We noteren alvast: $AD = 3h$. Hier is een drietal (van de vijftig...) reacties op *Leraar Wiskunde*.

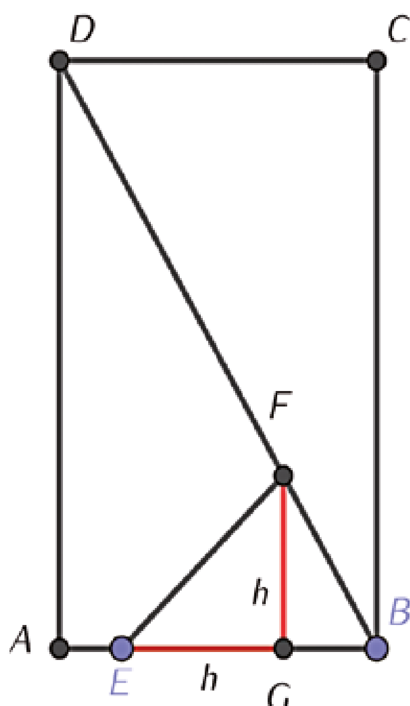


figuur 2

De opdracht is om het exact op te lossen. Ik had een andere strategie in gedachten. De rekenmachine geeft inderdaad dit als antwoord, zie figuur 2. Is dit exact?

Overigens is de vraagstelling qua taal nogal armzalig geformuleerd! De komma na zo moet weg en verdeeld(!!!!)

Hier liep ik eerder dit jaar ook tegenaan (in een tentamen van mijn 6V wisB bezemgroep). Ik heb het goed gerekend met als argument dat de leerling niet kan weten dat dit niet is zoals ik de opgave bedoeld had. Door de sin(75) 'exact' uit de GR te halen werd de opgave wel een stuk makkelijker.



figuur 3

Elegantere aanpak

ΔEBF, zie figuur 3, kun je, nadat je de hoogtelijn uit punt F hebt getrokken, verdelen in een gelijkbenige driehoek en in een halve gelijkzijdige driehoek. De zijden die op lijnstuk AB liggen hebben lengte h en $3 - h$. Breng beide driehoeken met elkaar in verband, en je vindt dan: $h = \sqrt{3}(3 - h)$. Deze betrekking vind je ook via

$\tan(\angle ABD) = \sqrt{3} = \frac{h}{3-h}$. Dat levert op:

$$h = \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -\tfrac{1}{2}(3\sqrt{3}-9).$$

$$AD = 3h = 3(-\tfrac{1}{2}(3\sqrt{3}-9)) = 13{,}5 - 4{,}5\sqrt{3}$$

Terugblik

Je kunt heel wat rekenwerk krijgen als je met de sinusregel aan de gang gaat, zie ook figuur 2. Je komt dan ongetwijfeld het verhoudingsgetal sin(75°) tegen. Leerlingen lopen dan vast, maar met de somregel kom je er wel uit: sin(75°) = sin (45° + 30°) =

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{3} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Eigenlijk hopen we dat leerlingen niet meteen naar technieken grijpen en wild om zich heen gaan rekenen. We willen graag een houding van eerst goed lezen en rustig nadenken.

Voorbeeld 2 De integraal

Onafhankelijk van a

Voor elke waarde van a ($a > 0$) is een functie f_a gegeven door $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$. In figuur 1 zijn de grafieken van f_2 en f_6 weergegeven.

figuur 1

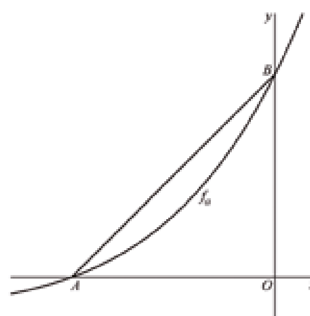


Voor elke waarde van a ($a > 0$) heeft de grafiek van f_a een punt P_a met een horizontale raaklijn.

1 Toon aan dat al deze punten P_a op één lijn liggen.

De grafiek van f_a snijdt de x-as in punt $A(-\frac{1}{a}, 0)$ en de y-as in punt $B(0, 1)$. Zie figuur 2.

figuur 2



De grafiek van f_a verdeelt driehoek OAB in twee delen.

2 Toon aan dat de verhouding van de oppervlakten van deze twee delen onafhankelijk is van a.

figuur 4

Deze opgave is terug te vinden in deel 4 vwo B (hoofdstuk 16, blz 170) van *Getal & Ruimte*. Het is ook vraag 2 van het pilotexamen wiskunde B vwo, eerste tijdvak in 2012, zie figuur 4.
Kun je dit op een toets wel aan leerlingen van vwo wiskunde B vragen? Eerst weer een aantal reacties uit de Facebookgroep:

Bij GR hoofdstuk 16 wis B wordt een primitieve gevraagd die m.i. met partieel integreren alleen verkregen kan worden. Ik dacht dat dit onder het stuk voortgezette integraalrekening viel wat alleen als keuzeonderwerp in het SE mag zitten. In de syllabus heb ik ook geen vermelding van partieel integreren gevonden. Zit ik juist?

Volgens mij heb je helemaal gelijk! Ik heb andere 'technieken' geprobeerd, maar je komt toch altijd uit op $\int x \cdot e^{ax}\,dx$ *en die kan alleen via partieel. Weg dus met zo'n vraagstuk! En dat hadden de auteurs zelf moeten bedenken!*

Antwoord van een woordvoerder van CvTE (College voor Toetsen en Examens):
U heeft een vraag gesteld over een vraag in het pilotexamen vwo wiskunde B van 2012, eerste tijdvak, waarin de primitieve van een functie moet worden gevonden.
Ik neem aan dat u hier doelt op vraag 2, waar gevraagd wordt naar een oppervlakte. Bij twee van de drie oplos-

singsmethodes dient de kandidaat een primitieve van $(1 + ax)\cdot e^{ax}$ te bepalen om deze oppervlakte te berekenen. Uw constatering dat partieel integreren geen deel uitmaakt van de examenstof (zie syllabus) is juist. In deze situatie dient de kandidaat te bedenken dat een primitieve van de gegeven functie in ieder geval de factor e^{ax} dient te bevatten en al puzzelend tot een juiste, volledige primitieve moet komen. Omdat partieel integreren dus geen deel uitmaakt van de examenstof, kan een dergelijke vraag alleen bij eenvoudig te vinden primitieven gesteld worden. Ik hoop met deze toelichting uw onzekerheid over de juiste oplossing te hebben weggenomen.

Het is natuurlijk wel zo dat in hoofdstuk 15 bij verschillende vraagstukken de functie $x \cdot e^{ax}$ x^* in verschillende gedaantes gedifferentieerd moet worden. En dat de oplettende leerlingen uit ervaring weten dat de afgeleide de vorm heeft $(1 + ax)\cdot e^{ax}$. Verder eens.

Het antwoord van CvTE is belachelijk! Een examenkandidaat bij het CSE wordt niet geacht 'puzzelend bezig te zijn'! Wie is deze CvTE persoon die een dergelijk antwoord durft te geven?

Om tot een goed oordeel te komen is het belangrijk om te kijken hoe deze problematiek in *G & R* wordt aangepakt. Komen we bijvoorbeeld in hoofdstuk 15 samengestelde functies tegen van de vorm $P_n(x) \cdot e^{ax}$ waarbij $P_n(x)$ een veeltermfunctie is van de n^e graad? Na enig zoeken vinden we op pagina 120 de functies $f(x) = 5x \cdot e^x$ en $g(x) = 5x^2 \cdot e^x$. Op pagina 134 komen we tegen $f_a(x) = (x + a) \cdot e^x$. Er wordt gedifferentieerd maar doe je dan als leerling ontdekkingen zoals vermeld staan op een kladblaadje van een collega, deelnemend aan de discussie op Facebook in figuur 5? Ik nodig je uit om even het probleem theoretisch aan te pakken en nog verder te gaan dan die collega...

Even een stukje theorie. We gaan een functie van de vorm $P_n(x) \cdot e^{ax}$ differentiëren. Er geldt dus dat $(P_n(x) \cdot e^{ax})' = P'_n(x) \cdot e^{ax} + a \cdot P_n(x) \cdot e^{ax} = (P'_n(x) + a \cdot P_n(x)) \cdot e^{ax}$.
De term $(P'_n(x) + a \cdot P_n(x))$ is weer een veelterm van de graad n.
De primitieve van functie $P_n(x) \cdot e^{ax}$ is dus ook een product van een veelterm van de n^e graad met e^{ax}. De leerlingen zelf moeten toch eerst oefenen met bijvoorbeeld een functie als $f(x) = (ax^2 + bx + c)\cdot e^x$ - liefst met vaste waarden voor a, b en c – met $((ax^2 + bx + c) \cdot e^x)' = (2ax + b) \cdot e^x + (ax^2 + bx + c) \cdot e^x = (ax^2 + (2a + b) \cdot x + (b + c)) \cdot e^x$ en nog veel meer opgaven om tot de gewenste ontdekking te komen.

Nu deze kennis toepassen

De primitieve van $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$ van het pilotexamen, zie figuur 5, is dus van de vorm $F_a(x) = (px + q) \cdot e^{ax}$ (op een constante na) met $a > 0$ en

[(ax²+bx+c)eˣ]' =
(2ax+b)eˣ + (ax²+bx+c)eˣ
= (ax² + (2a+b)x + b+c)eˣ
afgeleide van polynoom·eˣ
is weer een polynoom·eˣ
met dezelfde graad
Dus ook bij primitiveren.
∫(x+1)e^{ax} = (ax+a+b)eˣ
a = 1 en a+b = 1
⇒ b=0
Primitieve is dus xeˣ
(de a in e^{ax} is niet relevant

figuur 5

p en q als reële constanten. Deze laatste vorm gaan we differentiëren. $F'_a(x) = (p + a(px + q)) \cdot e^{ax} = (apx + p + aq) \cdot e^{ax}$. Er geldt ook dat $F'_a(x) = (ax + 1) \cdot e^{ax}$. Dus: $ap = a$ en $p + aq = 1$ met $a > 0$.
Er moet dan gelden dat $p = 1$ en $q = 0$.
Dus de gezochte primitieve is $F_a(x) = (x) \cdot e^{ax}$ op een constante na. Een hele berekening dus!

Andere (leerling)aanpak

Veronderstel dat een leerling ervoor kiest om vraag 2 van het pilotexamen op te lossen met integraalrekening.

Het gaat dus om de berekening van $\int_{-\frac{1}{a}}^{0} (1+ax) \cdot e^{ax}\,dx$.

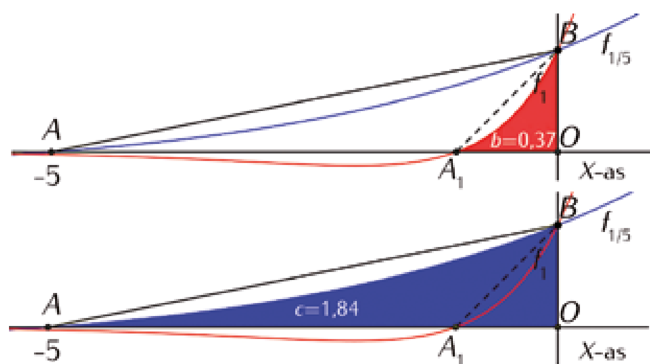
De leerling kijkt eens rustig naar de integrand $(1 + ax) \cdot e^{ax}$ en ziet dat het getal ax tweemaal voorkomt. Vervolgens bedenkt hij dat de primitieve van $(1 + ax) \cdot e^{ax}$ wel eens een productfunctie kan zijn waarbij de ene factor e^{ax} is.
En de integrand anders geschreven geeft $(1 + ax) \cdot e^{ax} = 1 \cdot e^{ax} + a \cdot x \cdot e^{ax}$. 'Blijkbaar is de productregel toegepast', denkt de leerling. En zo ligt de primitieve $F_a(x) = (x) \cdot e^{ax}$ voor de hand. Vervolgens controleert hij nog even zijn vermoeden. Prachtig toch? Maar hoe ontwikkelt een leerling zo'n manier van werken?

Terug naar 2012 het eerste jaar van het pilotexamen

In *Euclides* (88)1 schrijft Ruud Stolwijk van het Cito dat het eerste pilotexamen vwo wiskunde B afgenomen werd bij 243 leerlingen die zijn opgeleid volgens de pilotversie van het programma dat naar verwachting in 2015 landelijk in de vierde klas zal worden ingevoerd. Na afloop van dit pilotexamen was de commotie onder de pilotdocenten en hun leerlingen groot. We zoomen nu alleen in op opgave 2. De *p'* waarde van opgave 2 was 32 bij een maximale score van 5 punten. Volgens een QuickScan vonden de pilotdocenten het pilotexamen te moeilijk, te lang en sloot het niet aan bij het gegeven onderwijs en verdiende het een dikke onvoldoende. Bij opgave 2 hebben de constructiemakers gedacht – ze construeerden het examen vanuit een syllabus – dat de leerlingen, goed getraind in denkactiviteiten, snel zouden inzien dat de primitieve van $(1 + ax) \cdot e^{ax}$ op een constante na gelijk is aan $(x) \cdot e^{ax}$. Dat bleek dus tegen te vallen.
Kan een strategie bij vraag 2 nog eleganter?
Ja zeker, met transformaties.

Niet primitiveren maar transformeren

Je moet als leerling wel bekend zijn met transformeren van vlakdelen. We nemen voor a eerst een vaste waarde. Bijvoorbeeld de waarde voor a die hoort bij die grafiek van de familie functies $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$ waarvan het snijpunt met de X-as punt (-5, 0) is. Let op, dat betekent dat we voor a de waarde 1/5 nemen. In figuur 6 zijn de grafieken van f_1 en $f_{1/5}$ met de bijbehorende lijnstukken A_1B en $A_{1/5}B$ afgebeeld. De oppervlakte van $\Delta OBA_{1/5}$ is nu vijf maal zo groot als de oppervlakte van ΔOBA_1.
De grafiek van $f_{1/5}$ kunnen we laten ontstaan door een horizontale uitrekking met factor 5. De oppervlakte van het vlakdeel van $f_{1/5}$ behorend bij het interval [-5, 0] is dan vijfmaal zo groot als de oppervlakte van het vlakdeel van f_1 behorend bij het interval [-1, 0].



figuur 6

De verhouding van de oppervlakten van de twee delen bij $f_{1/5}$ blijft dus hetzelfde als bij f_1.
Dit geldt natuurlijk ook voor een willekeurige positieve waarde voor a. De grafiek van $f_a(x) = (1 + ax) \cdot e^{ax}$ en bijbehorend lijnstuk A_aB zijn op te vatten als beelden van de grafiek van $f_1(x) = (1 + x) \cdot e^x$ en bijbehorend lijnstuk A_1B onder de horizontale uitrekking met factor $1/a$. De oppervlakten van beide delen worden $1/a$ maal zo groot, maar de verhouding blijft hetzelfde. Nauwelijks rekenwerk, elegant toch?

Tot slot

Voor beide opgaven zijn er verschillende strategieën. Zeker bij (school)examenopgaven is dat prettig en ook wenselijk. Voor beide opgaven zijn er elegante aanpakken. Maar die aanpakken moeten wel zo zijn dat een substantieel deel van de examenkandidaten daar opkomt. Leerlingen moeten de benodigde voorkennis en manier van werken wel in hun bagage hebben meegekregen. Een uitspraak zoals 'al puzzelend tot een juiste oplossing komen', lijkt mij tijdens een examen misplaatst. Maar we hebben gezien dat die opmerking wel een diepere laag heeft.

Voor beide opgaven zijn er voor de hand liggende strategieën – onmiddellijk grijpen naar technieken - waarbij de leerlingen met grote kans verzanden in onnodig veel rekenwerk met de nodige rekenfouten. Het wordt allemaal anders als we ervoor zorgen dat leerlingen opgeleid worden vanuit de brugklas met de nodige denkactiviteiten. De twee opgaven zijn nu interessant voor in de klas maar voor toetsing, zeker op een examen, lijken ze ongeschikt. Ik wil er wel voor pleiten dat de huidige aanpak kritisch wordt bekeken en wiskundige denkactiviteiten meer en beter geïntegreerd worden in het dagelijkse wiskundeonderwijs.

Bronnen

- *Euclides* (88)1, september 2012, pagina's 18, 19, 21 en 36.
- Facebookgroep *Leraar Wiskunde* in de maand januari in 2018. De cursief gedrukte uitspraken zijn letterlijk overgenomen. Eveneens de afbeeldingen in figuur 2 en 5.
- Delen 3 en 4 van de elfde editie van wiskunde B vwo van *Getal & Ruimte*.

Over de auteur

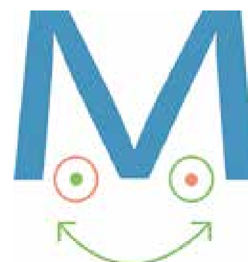
Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

LEREN LOGISCH REDENEREN BIJ WISKUNDE C ≠ CURSUS LOGICA

Hugo Bronkhorst
Gerrit Roorda

EERSTE ERVARINGEN MET EEN INTERVENTIE IN DE KLAS

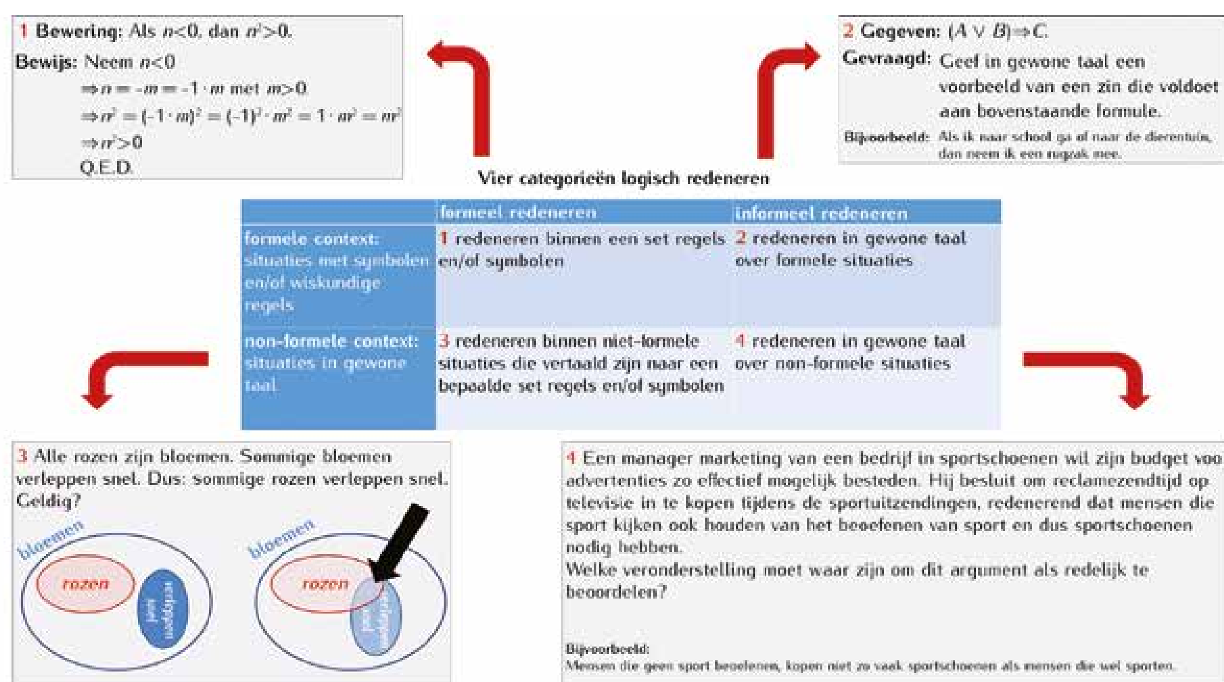
Onderwijs meets Onderzoek wordt dit jaar voor de derde keer georganiseerd op 11 oktober 2018. Op de editie van 2017 presenteerde Hugo van Bronkhorst zijn onderzoek. Samen met Gerrit Roorda doet hij verslag over het nieuwe onderdeel van wiskunde C: logisch redeneren.



In mei doen de eerste leerlingen examen in het vernieuwde examenprogramma wiskunde C. Spannend voor de leerlingen, maar ook voor hun docenten. Naast veranderingen binnen de algebraïsche vaardigheden, zullen de nieuwe domeinen 'vorm en ruimte' en 'logisch redeneren' opvallende verschillen laten zien met de afgelopen jaren. Dit artikel beschrijft de ervaringen met een interventie, ontwikkeld voor promotieonderzoek, die zich richt op leren analyseren van al dan niet logische redeneringen. Daarbij ontwikkelden we een categorisering voor verschillende redeneervormen. De eerste ervaringen laten zien dat leerlingen het onderwerp uitdagend vinden en goed kunnen schematiseren.

Inleiding

Wiskundigen interpreteren het begrip 'logisch redeneren' vaak als het toepassen van strikte regels binnen de formele logica met behulp van formules in de propositie- of predicatenlogica, verzamelingenleer en waarheidstafels. Dat is echter niet de bedoeling van het nieuwe examenprogramma voor wiskunde C. In de syllabus[1] van het CvTE staat het woord 'logica' nergens vermeld. Het begrip 'logisch redeneren' moet dus breder gezien worden. Eindterm 5 zegt bijvoorbeeld: 'De kandidaat kan de correctheid van redeneringen en daarbij horende conclusies, zoals gebruikt in het maatschappelijk debat, verifiëren en analyseren.' Dit suggereert dat het domein een voorbereiding moet geven op de informatiemaatschappij: voor het dagelijks leven, studie en beroep. Uitermate geschikt voor wiskunde C-leerlingen die onder andere voorbereid worden op een carrière in het onderwijs, journalistiek, politiek of rechtspraak. We willen toch allemaal dat de kans dat een rechter op basis van een onvolledige of onjuiste redenering tot een uitspraak komt zo klein mogelijk is. De genoemde verbreding wil dus niet zeggen dat formalisaties niet nuttig zijn.



figuur 1 Categorieën logisch redeneren[2]

De eindtermen geven hier ook handvatten voor door logische symbolen (∧, ∨, ⇒ en ¬) en Venn-diagrammen voor te schrijven als examenstof. Onze hypothese is dat het gebruik van formele redeneer-schema's, zoals Venn-diagrammen en het gebruik van logische symbolen, helpt bij het redeneren in non-formele contexten; situaties in gewone taal. In ons onderzoek proberen we antwoord te vinden op de vragen:

1) Welke invloed heeft onderwijs in logisch redeneren op de ontwikkeling van formele en informele redeneervaardigheden van leerlingen in vergelijking met een groep die dit onderwijs niet volgt?
2) In hoeverre gebruiken leerlingen formele redeneerschema's bij het analyseren van redeneringen in non-formele contexten?

Om antwoord te vinden op deze vragen wordt een quasi-experimenteel, *mixed methods-design* gebruikt, bestaande uit een schriftelijke voor- en natoets, een lessenserie, lesobservaties en hardop-denksessies.

> 'MET ANDERE HOOFDSTUKKEN LOS JE GEWOON EEN SOM OP, NU MOET JE ECHT NADENKEN EN ZIJN ER MEERDERE MOGELIJKHEDEN.'

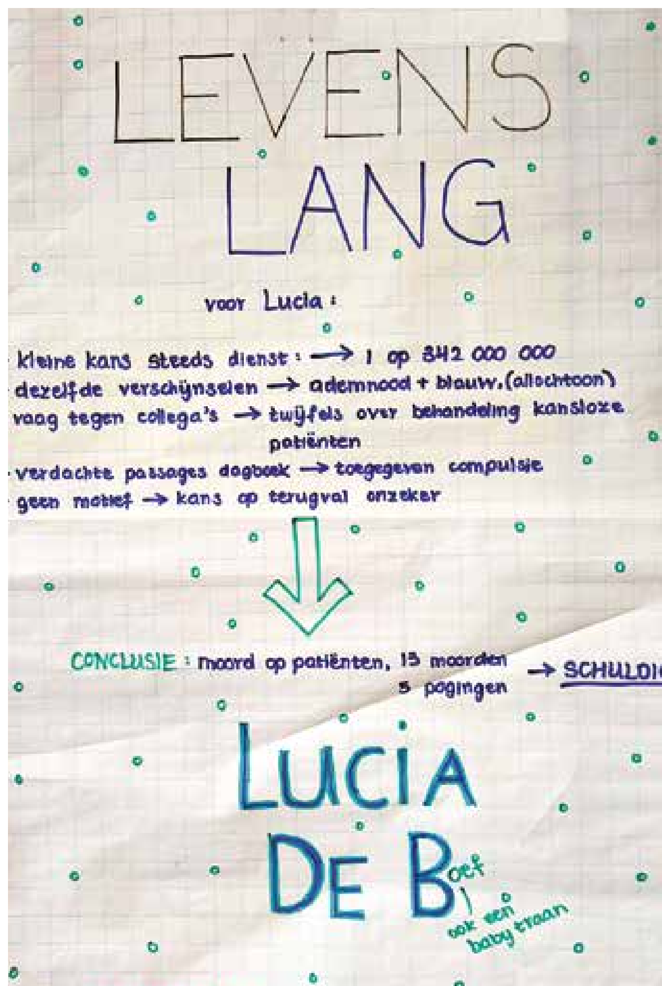
Categorisering

Tijdens de NVvW-conferentie *Onderwijs meets Onderzoek* afgelopen juni zijn vier categorieën van logisch redeneren gepresenteerd, zie figuur 1, om onderscheid te maken tussen verschillende typen contexten en manieren van redeneren. Deze indeling biedt handvatten voor de analyse van redeneringen van leerlingen alsook aanknopingspunten voor de opbouw van een interventie. Een interessant gebied is hoe formeel en informeel redeneren elkaar kunnen ondersteunen. Preciezer: als we terugkijken naar eindterm 5 over het maatschappelijk debat uit de inleiding (categorie 4), dan is het interessant hoe formalisaties (categorie 3) het redeneerproces kunnen ondersteunen en complexe argumenten kunnen weergeven. Met logische symbolen kunnen we de bewering van de manager uit voorbeeld 4 snel inzichtelijk maken. Een stukje van de redenering van de manager luidt: 'Mensen die sport beoefenen hebben sportschoenen nodig'. Met andere woorden: *sport* ⇒ *sportschoenen*. Hieraan zien we direct dat ook moet gelden: ¬*sportschoenen* ⇒ ¬*sport* (modus tollens). Oftewel: als je geen sportschoenen nodig hebt, dan sport je niet. De manager gaat daarbij voorbij aan alle sporten waarbij geen schoenen nodig zijn: zwemmen, schaatsen, etcetera.

Interventie

Afgelopen najaar is een pilotinterventie uitgezet op vier scholen. Een groep enthousiaste docenten heeft meegewerkt aan de opbouw en uitvoering. In de serie van acht lessen ligt enerzijds het accent op het zelf bedenken van schematiseringen voordat methodes worden aangereikt. Anderzijds is er veel aandacht voor interactie tussen leerlingen onderling, alsook in klassengesprekken waardoor alle leerlingen actief met de stof bezig zijn en hun eigen strategieën tegen het licht kunnen houden. De lessenserie begint met aansprekende vraagstukken via de interactieve tool *Socrative*[3] om verschillende gebieden van redeneren te laten zien, waarna een gehele les redeneren in de rechtbank centraal staat. Een krantenartikel (les 2) over de rechtszaak van Lucia de B., een passende context bij het Cultuur en Maatschappij-profiel, laat leerlingen toewerken naar de opbouw en het schematisch weergeven van een redenering. Het artikel met als titel 'Verpleegster Lucia de B. krijgt levenslang'[4] past prima bij eindterm 5 over het maatschappelijk debat en zit vol redenen (uitgangspunten) die de rechtbank gebruikt om tot de conclusie 'schuldig' te komen. Ook staan er bewijzen/onderbouwingen in. Het verschil tussen een uitgangspunt en onderbouwing is soms lastig te maken, maar zonder dat leerlingen les hebben gehad in schematiseren en visualiseren wordt er in groepjes van drie en vier volop gediscussieerd en weten ze samen tot een overzichtelijk geheel te komen. Een voorbeeld van een uitwerking staat in figuur 2. Het schema van deze leerlingen zou nog uitgebreid kunnen worden door tegenargumenten te verzamelen en/of door te achterhalen waar de lengte van de straf (levenslang) vandaan komt, dat een mooi bruggetje is naar het thema verzwegen veronderstellingen en de uiteindelijke vrijspraak na herziening van de zaak. Door deze concrete ervaring waarin leerlingen inzien dat een schema kan helpen, is de stap naar lessen met korte losse formalisaties ook logisch voor de leerlingen omdat het nut hiervan is aangetoond.

In de daaropvolgende lessen worden dan ook korte redeneringen geschematiseerd en wordt het verschil tussen waarheid en geldigheid met behulp van syllogismen duidelijk gemaakt. Dit gebeurt eerst in gewone taal, waarna een verdere formalisering met letters en symbolen volgt alsook de weergave in Venn-diagrammen. Veel nadruk ligt er op als-dan-redeneringen omdat hieruit soms moeilijk conclusies te trekken zijn. In de laatste lessen komen langere teksten weer terug met maatschappelijk relevante thema's waar onzekerheid een rol kan spelen waarin leerlingen hun kennis van formalisaties en schematisering kunnen



figuur 2 Poster gemaakt door drie leerlingen naar aanleiding van een krantenartikel over de uitspraak van de rechtbank in 2003. In 2010 werd Lucia onschuldig bevonden en vrijgesproken.

toepassen. Denk aan thema's als alcoholgebruik, het verband tussen spaargeld en een huis kopen of het verband tussen slechte cijfers en het gebruik van mobieltjes in de klas. Ook zijn verschillende examenopdrachten uit de pilotexamens opgenomen als extra oefening.

Ervaringen

De eerste ervaringen zijn zeer positief. Docenten geven in hun logboeken aan dat de leerlingen steeds (zeer) serieus aan de opdrachten hebben gewerkt. Ook uit de lesobservaties blijkt dat leerlingen enthousiast met de stof bezig zijn en actief op elkaar reageren. Leerlingen moeten wennen aan de open opdrachten en vinden het soms moeilijk om zelf met structuren of visualisaties te komen, maar desondanks hebben ze vaak creatieve ideeën om zaken te schematiseren en te visualiseren. Een leerling tijdens de vierde les kan het mooi verwoorden: 'Met andere hoofdstukken los je gewoon een som op, nu moet je echt nadenken en zijn er meerdere mogelijkheden.' Een andere leerling zegt na afloop over het samenwerken in groepjes: 'Dan kun je op een andere manier erover nadenken, dan wat je eigenlijk zelf dacht. Dat is wel heel handig bij dit onderwerp denk ik.'

Vervolg

Op dit moment worden de resultaten van de toetsen en observaties verwerkt om de interventie en lessenserie te verbeteren. Voor komend schooljaar zijn we nog op zoek naar enthousiaste docenten die ook graag met dit materiaal aan de slag willen gaan. Dat kan gewoon als vervanging van het hoofdstuk uit de reguliere schoolboeken. Stuur gerust en geheel vrijblijvend een e-mail voor meer informatie!

Dit werk maakt deel uit van het onderzoeksprogramma Promotiebeurs voor leraren met projectnummer 023.007.043 dat (mede)gefinancierd is door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

Noten

[1] College voor Toetsen en Examens. (2016). *WISKUNDE C VWO | syllabus centraal examen 2018 (Bij het nieuwe examenprogramma) nader vastgesteld 2*. Te downloaden op: *https://www.examenblad.nl/examen/wiskunde-c-vwo-2/2018*

[2] Brookhart, S. M. (2010). *How to assess higher-order thinking skills in your classroom.* Alexandria, VA: ASCD. (voorbeeld 4, eigen vertaling)
Stanovich, K. E., West, R. F., & Toplak, M. E. (2016). *The rationality quotient: Toward a test of rational thinking.* Cambridge, MA: The MIT Press.
Voss, J. F., Perkins, D. N., & Segal, J. W. (Red.). (1991). *Informal reasoning and education.* Hillsdale, N.J.: L. Erlbaum Associates.

[3] https://www.socrative.com/

[4] Bewerking van artikelen uit *Trouw* en *NRC Handelsblad*:
Levenslang voor moorden in ziekenhuis. (25 maart 2003). *NRC Handelsblad.* Geraadpleegd van *https://www.nrc.nl/nieuws/2003/03/25/levenslang-voor-moorden-in-ziekenhuis-7632018-a387299*
Verpleegster Lucy de B. krijgt levenslang. (25 maart 2003). *Trouw.* Geraadpleegd van *https://www.trouw.nl/home/verpleegster-lucy-de-b-krijgt-levenslang~a4c27eb0/*

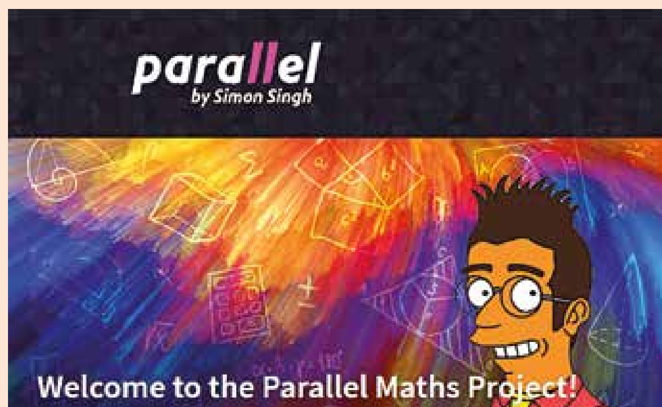
Over de auteurs

Hugo Bronkhorst is docent wiskunde aan het Harens Lyceum en doet als promovendus onderzoek aan de Rijksuniversiteit Groningen onder begeleiding van Martin Goedhart, Gerrit Roorda en Cor Suhre.
E-mailadres: *h.bronkhorst@rug.nl*
Gerrit Roorda is als vakdidacticus wiskunde verbonden aan de lerarenopleiding van de Rijksuniversiteit Groningen en de deeltijdopleiding van de NHL.
E-mailadres: *g.roorda@rug.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Nieuwe website Simon Singh voor scholieren 10 - 14 jaar



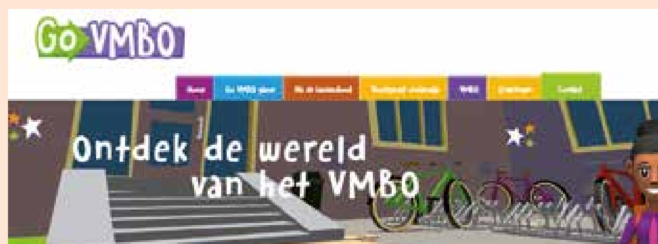
Simon Singh, auteur van de bestsellers *Het laatste raadsel van Fermat*, *The Code Book* en *The Simpsons and Their Mathematical Secrets* heeft een reeks van wekelijkse wiskunde-uitdagingen gecreëerd – ongeveer 30 minuten van interessant, leuk en uitdagend materiaal – die verder gaat dan de schoolwiskunde: geheim en geschiedenis, activiteiten en rariteitenkabinet, raadsels en problemen, zie *www.parallel.org.uk.*
Deze Engelstalige site is gericht op de leeftijdsgroep 10 - 14 jaar en biedt elke week een puzzelpagina voor 10 - 12 jaar en één voor 12 - 14 jaar. Het is een mix van wiskunde, video's, puzzels, enzovoort.
Het wordt automatisch nagekeken en leerkrachten kunnen een account maken, zodat ze kunnen zien hoe hun leerlingen het doen.

Bron: *https://www.platformwiskunde.nl/2018/02/14/new-website-from-simon-singh-aimed-at-ages-10-to-14/*

Go vmbo

De game *Go vmbo* is vernieuwd. Met deze game hebben al veel leerlingen van groep 7 en 8 kennisgemaakt met het vmbo. Een nieuw spel, voor verschillende devices, met nieuwe avatars die je kunt personaliseren, nieuwe opdrachten en natuurlijk alle kans om kennis te maken met het nieuwe vmbo.

In *Go vmbo* komt het hele voortgezet onderwijs aan de orde maar is er extra aandacht voor het vmbo en de profielen van het vmbo. Spelenderwijs ontdekken de



leerlingen welke profielen er zijn, waarvoor zij opleiden en hoe ze kunnen ontdekken waar hun passie en talent liggen. Het spelen van de vmbo-game is gratis. Leerlingen wordt wel gevraagd om een e-mailadres in te vullen, maar dat heeft alleen tot doel om na een pauze of thuis verder te kunnen gaan waar ze gebleven zijn.
Naast de game bevat de website informatie over het nieuwe vmbo voor ouders en leerkrachten. Zo komen niet alleen de nieuwe profielen aan de orde, maar wordt ook het verschil tussen onder- en bovenbouw uitgelegd, is er aandacht voor de verschillende leerwegen en vakkenpakketten én komen de doorstroommogelijkheden naar mbo en havo aan de orde. Naast feitelijke informatie bevat de site ervaringen van ouders en leerlingen met het vmbo. Een vmbo-advies is zeker niet het einde van de wereld, sterker nog: na het vmbo ligt er voor elke leerling een goede toekomst in het verschiet, want de vraag naar vakmensen neemt toe. Kijk op *govmbo.nl*

Bron: *https://www.primaonderwijs.nl/nieuws/go-vmbo-game-vernieuwd*

Krachtigste GPU-supercomputer van Nederland staat in Drenthe

Snelle radioflitsen zijn extreem heldere flitsen van radiolicht die miljarden lichtjaren reizen om de aarde te bereiken. Ze werden een decennium geleden ontdekt, maar waardoor ze veroorzaakt worden of waar ze vandaan komen, is nog grotendeels onbekend. Omdat de flitsen maar een fractie van een seconde duren, is het heel lastig om ze waar te nemen. Tot nu toe zijn er daarom nog maar 25 snelle radioflitsen gezien.
Daar gaat nu verandering in komen met *Apertif*, de nieuwe set camera's die in de schotels van ASTRON's radiotelescoop in Westerbork zijn geïnstalleerd. De Westerbork-array krijgt met *Apertif* van alle gevoelige telescopen in de wereld het grootste blikveld.



In één opname kan een groot deel van de hemel heel snel worden doorzocht. Om snelle radioflitsen en pulsars te vinden moet de telescoop 20.000 plaatjes van het heelal per seconde verwerken. Daarvoor heeft de telescoop wel nieuwe 'hersens' nodig. 'We hebben daarom een van de snelste supercomputers ter wereld ontworpen en gebouwd,' zegt Joeri van Leeuwen van ASTRON en de Universiteit van Amsterdam.

Het bijzondere aan de nieuwe supercomputer is dat hij helemaal wordt aangedreven door beeldverwerkingschips uit de gaming-industrie. 'Gamers gebruiken computers met zeer krachtige processors voor videotaken: de GPU's,' legt Van Leeuwen uit. 'Wij gebruiken deze chips nu voor het eerst om de plaatjes van onze telescoop te verwerken.' In de supercomputer zitten tweehonderd van deze GPU's, die vier terabyte per seconde aan data verwerken: meer data dan het hele internet van Nederland. Met een rekencapaciteit van 2 petaflops is het de krachtigste GPU-supercomputer van Nederland. De supercomputer zal zichzelf aanleren om ruimteflitsen te ontdekken in de duizenden plaatjes van de telescoop. 'We deden dat eerst zelf, handmatig', zegt Van Leeuwen, 'maar dat is enorm veel werk, en ook foutgevoelig. De computer zal naarmate hij meer flitsen ontdekt, de flitsen steeds beter leren onderscheiden. We hopen dan één snelle radioflits per week te ontdekken, waarvan we precies de locatie kunnen bepalen.' Met de supercomputer hoopt Van Leeuwen het mysterie rondom de snelle ruimteflitsen te ontrafelen. 'We weten dat ze uit andere sterrenstelsels komen, maar niet precies waarvandaan. Ook is het nog onbekend of het exploderende sterren zijn, flitsende zwarte gaten of felle stralen van neutronensterren.'

Bron: *https://www.nwo.nl/actueel/nieuws/2018/01/de-krachtigste-supercomputer-van-nederland-staat-in-drenthe.html*

VAKANTIECURSUS

'WISKUNDE IN JE BROEKZAK: CRYPTOGRAFIE IN HET DAGELIJKS LEVEN'

Het thema van de PWN Vakantiecursus 2018 is cryptografie: de wiskunde van het beveiligen van gegevens door middel van versleuteling en authenticatie.

De vakantiecursus zal dit jaar, meer dan de laatste jaren, een echt cursuskarakter hebben. In een aantal lessen zal door dezelfde docent de basistheorie worden behandeld. Daarna zullen meer specifieke onderwerpen diepgaander worden behandeld door andere sprekers. Die basis bestaat uit: symmetrische cryptografie, cryptanalyse (het 'kraken' van cryptografische systemen), asymmetrische cryptografie (met name RSA en crypto gebaseerd op Elliptische Krommen) en de achterliggende getaltheorie, en het gebruik ervan in de praktijk, met name het beveiligen van gegevens op het Internet (TLS / https, certificaten). Ook wordt een inleiding gegeven op hashfuncties. Tijdens de lessen zal er ruimte zijn voor het zelf oefenen met de stof. Als verdieping zal in ieder geval de wiskunde achter Blockchains (Bitcoin) aan de orde komen, en hoe privacy met behulp van cryptografie op een smartcard gestalte kan krijgen (denk aan: hoe kun je op een volledig controleerbare manier aantonen dat je 18+ bent zonder je geboortedatum, of je naam en adres, te hoeven afgeven).

De cursus wordt op de volgende data gehouden:
Eindhoven: vrijdag 24 en zaterdag 25 augustus op de TU Eindhoven
Amsterdam: vrijdag 31 augustus en zaterdag 1 september bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI)

De cursus is voor wiskundedocenten van elk niveau toegankelijk, evenals voor studenten van lerarenopleidingen.
Kosten: € 95. Studenten: € 35. Gepensioneerden: € 50. Inbegrepen is een warme maaltijd op vrijdag en een lunch op zaterdag.
Aanmelden: *www.platformwiskunde.nl/vakantiecursus*
Voor vragen: *vakantiecursus@platformwiskunde.nl*









KLEINTJE DIDACTIEK

Lonneke Boels

SIGNIFICANTE CIJFERS EN AFRONDEN OP DECIMALEN

Herken je dit probleem: leerlingen ronden op het schoolexamen het eindantwoord correct af op het gevraagde aantal decimalen en op het eindexamen gaat het toch ineens mis. De oorzaak van dit probleem zit hem vermoedelijk in het verschil tussen significante cijfers en aantal decimalen. Leerlingen die natuurkunde en/of scheikunde in hun pakket hebben, denken soms dat dit hetzelfde is.

Hoe zat het ook alweer met die significante cijfers? Eerst maar eens een paar voorbeelden, zie tabel 1. Daar is duidelijk te zien dat het aantal cijfers achter de komma – het aantal decimalen – niets te maken heeft met het aantal significante cijfers.

Nullen

Nullen aan het eind van het getal tellen altijd mee voor het aantal significante cijfers, zie het tweede en het vijfde voorbeeld. Nullen voor de komma alleen als er ook andere cijfers voor staan zoals in het tweede en derde voorbeeld te zien is. Mijn scheikundecollega Remko Schoot Uiterkamp legt dit zo uit: 'significantie begint altijd te tellen vanaf het eerste cijfer dat geen 0 is. Daarna telt alles mee, dus ook 0 (en daarbij vertel ik dan dat 10 cm minder nauwkeurig gemeten is dan 10,0 cm)'.

Een verwarring van leerlingen is de volgende. Bij wiskunde vragen we leerlingen soms om op tientallen af te ronden. 979 wordt dan 980. We vinden, als wiskundigen, dit getal dan *minder nauwkeurig* omdat het is afgerond op tientallen (centimeters). Maar schei- en natuurkundigen zijn dat niet met ons eens. Als zij het getal minder nauwkeurig willen noteren, zullen ze dat juist niet als 980 noteren maar als $9{,}8 \times 10^2$ Noteren we het getal als 980 dan betekent dit voor natuur- en scheikundigen dat de meting met grotere nauwkeurigheid – namelijk 1 centimeter – gemeten is, omdat er drie significante cijfers zijn.

Wetenschappelijke notatie

Het vierde en vijfde voorbeeld laten zodoende zien hoe het – voor wiskundigen!! - zelfde getal, in de

Meetwaarde	Aantal significante cijfers in de meetwaarde (natuur- en scheikunde)	Aantal decimalen in de meetwaarde (wiskunde)	Nauwkeurigheid van je meetwaarde (natuur- en scheikunde)
72 cm	2	0	1 cm
10,0 cm	3	1	0,1 cm
0,06 cm	1	2	0,01 cm
35,89 cm	4	2	0,01 cm
980 cm	3	0	1 cm
$9{,}8 \times 10^2$ cm	2	1	10 cm

tabel 1 Het verschil tussen significante cijfers en decimalen. Leerlingen verwarren dit op wiskunde-examens. In wiskunde-examens komt bovendien de uitdrukking 'in twee decimalen nauwkeurig' voor en dat zorgt voor extra verwarring met de nauwkeurigheid van je meetwaarde, omdat die (bij natuur- en scheikunde) los staat van het aantal decimalen.

wetenschappelijke notatie kan worden genoteerd en dat deze notatie voor de natuur- en scheikundigen een groot verschil maakt. De wetenschappelijke notatie maakt het mogelijk om elk getal in elk aantal significante cijfers te geven, aangezien het getal voorafgaand aan de macht van tien altijd ligt in het interval [1, 10⟩.
Significantie heeft bij schei- en natuurkunde invloed op de berekeningen. Bij optellen en aftrekken bepaalt het kleinste aantal cijfers achter de komma – het aantal decimalen – hoe je moet omgaan met significantie. Hierin wordt het aantal nullen wél meegenomen. 0,003 heeft dus drie cijfers achter de komma en 0,0022 heeft er vier. Opgeteld geeft dit 0,005 want het kleinste aantal cijfers achter de komma is drie. Voorwaarde is wel dat de getallen in dezelfde macht van tien zijn genoteerd.

Vermenigvuldigen en delen

Bij vermenigvuldigen en delen bepaalt het kleinste aantal significante cijfers van elk getal hoeveel cijfers je in het eindantwoord mag geven. In tabel 2 staan enkele voorbeelden. Net als bij wiskunde rond je pas af aan het einde van je berekening, dus niet tussentijds.

Voor alle duidelijkheid: in het echte leven bepaalt de nauwkeurigheid van je meting (meetinstrument) hoe nauwkeurig je de meetwaarden kunt noteren en dus hoe nauwkeurig het eindantwoord van je berekening kan zijn. Met een geodriehoek kun je bijvoorbeeld de lengte van een voorwerp in millimeters nauwkeurig meten. Als je lengte L = 12 mm meet dan ligt de werkelijke waarde tussen 11,5 en 12,5 mm. De notatie bij natuurkunde is daarom net als bij wiskunde $11{,}5 \leq L < 12{,}5$.

Verhoudingen

Wat leerlingen verder nog lastig vinden, is 'het verschil in significantie tussen berekende verhoudingen en verhoudingen die volgen uit een reactievergelijking (coëfficiënten hebben geen invloed op de significantie)', aldus mijn scheikundecollega Suzanne van der Waal. Anders gezegd: in de reactievergelijking $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ zijn de coëfficiënten 2 en 1 (die laatste staat virtueel voor de O_2). Pure verhoudingen en dus niet getallen met maar één significant cijfer. In tegenstelling tot verhoudingen die je zelf bepaalt (bijvoorbeeld door het afmeten van twee vloeistoffen die je daarna in de gemeten verhouding samenvoegt – met elk een meetnauwkeurigheid dus) en die wél invloed hebben op de significantie. Ditzelfde speelt volgens collega's Harry van Loon en Floor Kamphorst bij sommige formules in de natuurkunde, zoals $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ (kinetische energie) en $E_v = \frac{1}{2}Cu^2$ (veerenergie). Zij geven aan: 'Leerlingen vinden het vreemd dat de $\frac{1}{2}$ niet meedoet in de significantie'. In de formule voor zwaartekracht, $Fz = 9{,}81 \cdot m$, doet de nauwkeurigheid van de valversnelling g (de 9,81) juist weer wel mee, en dat werkt dan weer extra verwarrend.

Nauwkeurige vraagstelling

Verschillende collega's, waaronder Floor Kamphorst, wezen mij er bovendien op dat leerlingen het bij schei- en natuurkunde erg verwarrend vinden dat de ene nul niet meetelt voor de significantie en de andere nul wel, zoals hiervoor al is uitgelegd. Wat kun je er aan doen om te zorgen dat leerlingen niet meer in de war raken? Allereerst zouden examenmakers de uitdrukking 'rond het

Berekening	Wiskundige uitkomst	Kleinste aantal significante cijfers	Kleinste aantal cijfers achter de komma	Uitkomst bij natuur- of scheikunde
131 + 2,7	133,7	2	0	134 of $1{,}34 \times 10^2$
131,0 + 72,4	203,4	3	1	203,4
$9{,}8 \times 10^2$ - 100	880	2	*1 (zie uitleg in de tekst)*	$9{,}8 \times 10^2 - 1{,}00 \times 10^2 = 8{,}8 \times 10^2$
6,7 × 3,9	26,13	2	1	26
6,70 × 3,900	26,13	3	2	26,1
6,7000 × 3,9000	26,13	5	4	26,130

tabel 2 Invloed berekeningen op het aantal significante cijfers bij natuur- en scheikunde. Het paars gemarkeerde deel van de tabel bepaalt hoe het antwoord moet worden gegeven. Voorwaarde is dat de getallen in de berekening in dezelfde macht van tien geschreven zijn.

antwoord af op drie decimalen nauwkeurig' uit hun vragen op het wiskunde-examen kunnen schrappen – zeker als het strijdig is met bovenstaande regels. Het is vermoedelijk het woord 'nauwkeurig' dat hier de associatie oproept van significante cijfers omdat het aantal significante cijfers alles te maken heeft met hoe nauwkeurig je hebt kunnen meten. De uitdrukking 'rond het antwoord af op drie decimalen' zou beter zijn. De vraag om 'op millimeters nauwkeurig' af te ronden is daarentegen wel eenduidig.

'LEERLINGEN VINDEN HET ERG VERWARREND DAT DE ENE NUL NIET MEETELT VOOR DE SIGNIFICANTIE EN DE ANDERE NUL WEL.'

Verwarring voorkomen

Verder kunnen we als docenten wiskunde expliciet aandacht besteden aan het verschil tussen afronden op drie cijfers *significant* en afronden op drie decimalen. Bovendien kunnen we onze collega's natuur- en scheikunde vragen om ditzelfde te doen.
Bovendien kan het geen kwaad om leerlingen te wijzen op de verschillen in omgaan met significantie bij optellen en aftrekken enerzijds en vermenigvuldigen en delen anderzijds. Op internet is namelijk ook uitleg te vinden waarbij wordt gesuggereerd dat het altijd gaat zoals bij vermenigvuldigen en delen en dat is voor de examens natuur- en scheikunde nu eenmaal niet de afspraak.

Voorts werd mij door de discussie met mijn collega's nog een verwarring van leerlingen duidelijk. Soms noteert een leerling op het examen het antwoord $1{,}061 \times 10^{-3}$ als antwoord op de opgave: *Bereken de kans op [...]. Rond je antwoord af op drie decimalen.* Want ook wiskundedocenten op zowel middelbare scholen als hbo en wo blijken het verschil tussen significantie en aantal decimalen vaak niet goed te kennen. Tom Goris (redacteur *Euclides*) gaf aan dat op congressen wiskundedocenten steevast *denken* dat 3,14 nauwkeuriger is dan 3141500 'want 3,14 heeft 2 decimalen'. Voor alle duidelijkheid: dat antwoord is dus fout. Als wiskundigen verwachten we hier het antwoord: 0,001. Maar als je bij natuur- en scheikunde leert om je antwoorden in de wetenschappelijke notatie te geven, dan is het antwoord van de leerling heel begrijpelijk. Zie ook de derde regel in tabel 2 waarin in cursief één decimaal is aangegeven waar wiskundigen vermoedelijk nul decimalen zouden invullen. Dan heb ik het dus niet over de leerlingen die 1,061 E -3 noteren want die begrijpen hun rekenmachine niet.

Tot slot

Tot slot kan iedereen die met onbevoegden, zoals studenten, werkt bij examentrainingen of het geven van bijlessen deze studenten trainen in het correct uitleggen van het verschil tussen significante cijfers en decimalen. Want ook dat is een mogelijke verklaring voor het verschil tussen de goed gemaakte derde schoolexamens in 6 vwo en de toegenomen fouten met afronden op het eindexamen.
Floor Kamphorst attendeerde mij nog op twee interessante artikelen [1] [2] in de *NVOX*, het blad van onze zustervereniging NVON (Nederlandse Vereniging voor het Onderwijs in de Natuurwetenschappen). Deze artikelen zijn geschikt voor wie dieper in de materie wil duiken
(zie website *Euclides*).


vakbladeuclides.nl/936boels

Met dank aan collega's Maarten Visser[1], Harry van Loon[1], Floor Kamphorst[2] (natuurkunde), Remko Schoot Uiterkamp[1], Suzanne van der Waal[1] (scheikunde).
[1]Christelijk Lyceum Delft, [2]Gemeentelijk Gymnasium Hilversum

Noten

[1] Jorna, H. Aflezen en significante cijfers. *NVOX*, september 2012, pp. 322-323
[2] Dijkstra, J. Haemers, S. Jorna, H. De precieze broer van de significante cijfers. De echte foutenbeschouwing. *NVOX*, februari 2013, pp. 59-61

De natuurkundige formules voor energie in dit artikel worden hier verder uitgelegd: *https://natuurkundeuitgelegd.nl/videolessen.php?video=energie*

Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl*

VASTGEROEST

'WISKUNDE OP STRAAT'

Ab van der Roest

Ab van der Roest kwam wiskunde tegen tijdens een wandeling, maar leed in eerste instantie aan gezichtsbedrog...

Lang geleden zei Wim Sonneveld in een conference: 'De humor ligt op straat mijnheer Sonneberg, de humor ligt op straat!' Hier moet ik soms aan denken als ik wiskunde op straat tegenkom. Kom je wiskunde dan op straat tegen? Ja, ik wel.
Laatst liep ik samen met mijn vrouw het laatste stukje van het Trekvogelpad, een langeafstandswandeling van Bergen aan Zee naar Usselo bij Enschede. Meer dan 400 km wandelen, maar niet achter elkaar. Bij Eibergen kwamen we langs een grenssteen, vlakbij de Mallumse Molen. Mijn vrouw is van de foto's en ik vroeg haar een foto te maken van de steen. Misschien kan ik hem nog eens gebruiken. Ze vroeg me wat ik er dan mee zou gaan doen. Het kan een leuk sommetje worden. Drie cirkels in een vierkant en dan de leerlingen uit laten rekenen hoeveel procent de cirkels (met binnengebied) innemen van het vierkant.



figuur 1 Grenssteen met het wapen van de Heer van Borculo

Onder het wandelen bleef ik denken aan dat vierkant met zijn cirkels. Op een paneel dat er bij stond, werd uitgelegd dat het wapen van de Heer van Borculo was afgebeeld. Maar niet die Heer hield mij bezig, maar het vierkant. Het klopt natuurlijk niet, want die drie cirkels passen helemaal niet op deze manier in een vierkant. Thuis heb ik de foto rechtgetrokken en duidelijk is te zien dat het niet om een vierkant gaat, maar om een rechthoek. Het perspectief bedriegt hier.



figuur 2 Zelfde foto als figuur 1, maar dan rechtgetrokken

Als de lengte $4r$ is, dan is de breedte $(2 + \sqrt{3})r \approx 3{,}732r$. De breedte is dus maar 6,7% minder dan de lengte en dat zie je vanuit een bepaald standpunt dus niet. Mooi gesprek met leerlingen denk ik dan. De twee opstaande zijden moeten natuurlijk netjes verticaal zijn, anders vindt er een vertekening plaats. De som die ik in gedachten had, wordt dan ook opeens veel moeilijker. Hij kan natuurlijk nog steeds, maar de leerling zal nu eerst moeten bedenken hoe de hoogte van de rechthoek uitgerekend moet worden. Een havo 4 leerling moet dat wel kunnen. Ik ben wel benieuwd hoeveel leerlingen, als ze de eerste foto krijgen dezelfde fout maken als ik maakte en van een vierkant uitgaan. Overigens kan in elke klas de vraag gesteld worden: 'Wat zie je op deze foto?' Ik neem aan dat antwoorden dan zullen variëren van een steen, tot een wapen en, omdat de wiskundeleraar de vraag stelt, drie cirkels en .... . Elke leerling zal dan kunnen inzien dat het zeker niet om een vierkant gaat. Zet ze maar aan het tekenen en ze zullen het ontdekken.
Zomaar een stukje wiskunde onder een wandeling en met Wim Sonneveld zeg ik: 'De wiskunde ligt op straat, maar je moet het wel willen zien.'

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

HET FIZIER GERICHT OP...

ALGEBRAÏSCH REDENEREN

Mara Otten

In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut of de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. In deze aflevering belicht Mara Otten een reeks activiteiten met betrekking tot het oplossen van (informele) algebraïsche vergelijkingen.



Algebraïsch redeneren op de basisschool

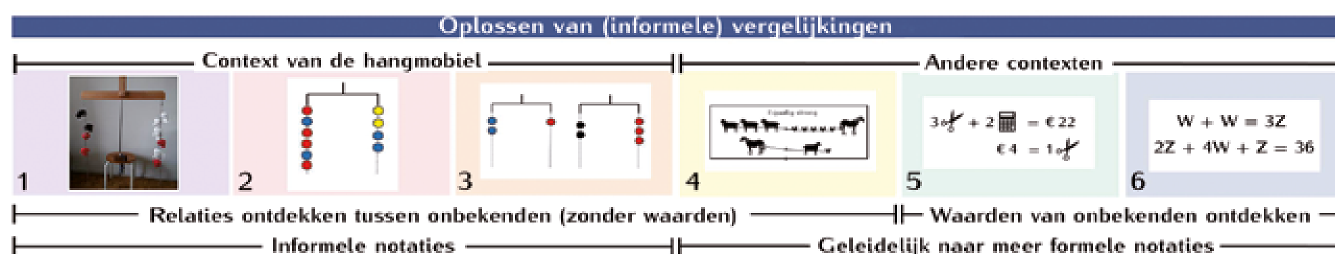
Er wordt steeds meer benadrukt dat het belangrijk is om een basis te leggen voor algebraïsch redeneren al voordat leerlingen naar het voortgezet onderwijs gaan. In het reken-wiskundecurriculum op de basisschool komt dit echter weinig aan bod. Binnen ons onderzoek in groep 7 hebben we daarom een lessenserie ontworpen met als doel om leerlingen kennis te laten maken met algebraische oplossingsstrategieën om informele vergelijkingen op te lossen, door ze zelf die strategieën te laten ontwikkelen. Dit is mogelijk met behulp van een hangmobiel waarop de leerlingen concrete handelingen uitvoeren waarbij algebraïsche strategieën worden uitgelokt. Door deze fysieke ervaringen met het in evenwicht houden komen leerlingen stapsgewijs naar het oplossen van formele vergelijkingen als $3x = 6 + x$. In figuur 1 staat een schematisch overzicht van de lessenserie.

De hangmobiel bestaat uit een horizontale balk met aan weerszijden een ketting, waaraan balletjes in verschillende kleuren met onbekende gewichten gehangen worden, zie figuur 2. De hangmobiel is in evenwicht, te zien doordat de balk dan horizontaal hangt, als het gewicht van alle balletjes aan de ene kant samen gelijk is aan het gewicht van de balletjes aan de andere kant.



figuur 2 Een leerling werkt met de hangmobiel

Door het in balans houden van de hangmobiel wordt op informele wijze een aantal algebraïsche strategieën uitgelokt, die belangrijk zijn bij het oplossen van vergelijkingen: Leerlingen kunnen de vergelijking herstructureren, door de positie van balletjes ten opzichte van elkaar aan één kant van de hangmobiel te veranderen of door balletjes van kant te verwisselen. Ze kunnen een onbekende isoleren, door balletjes aan beide kanten eraf te halen. Ze kunnen een onbekende substitueren, waarbij balletjes van een bepaalde kleur worden vervangen door balletjes van een andere kleur. Tijdens het werken met de hangmobiel redeneren leerlingen over het in balans houden van



figuur 1 Schematische weergave lessenserie

de hangmobiel. Hierdoor verbinden leerlingen de lichamelijke ervaringen van het werken met de hangmobiel aan de algebraïsche strategieën. Dit sluit aan bij de theorie van 'embodied cognition', waarbij concepten verankerd worden in lichamelijke ervaringen. In de rest van dit stuk bespreken we een aantal activiteiten uit onze lessenserie, die de docent zelf kan doen in de les. We beginnen met een activiteit met de fysieke hangmobiel, en bespreken vervolgens een aantal andere activiteiten waarin (informele) vergelijkingen en de strategieën van herstructureren, isoleren en substitueren eveneens centraal staan.

Houd de hangmobiel recht

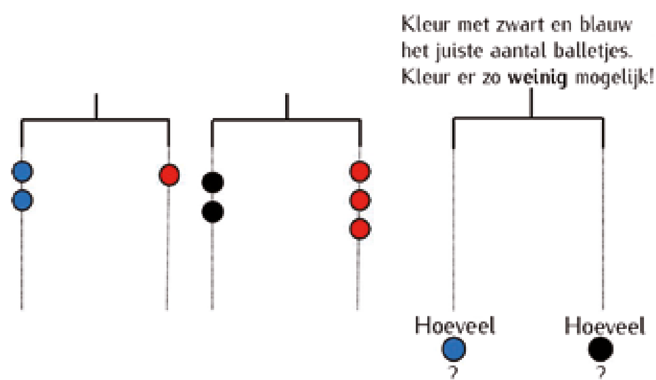
De balletjes aan de hangmobiel in deze eerste activiteit hebben de verhouding *twee zwarte balletjes* = *drie rode balletjes* = *zes witte balletjes*, zie figuur 3. De leerlingen kennen deze verhouding niet. De docent geeft de leerlingen in kleine groepjes de volgende opdracht: 'Wat kun je allemaal veranderen aan deze hangmobiel, zodat deze er anders uit komt te zien, terwijl je zorgt dat de hangmobiel recht blijft? Je mag dezelfde balletjes gebruiken, maar je mag er ook balletjes afhalen of bijhangen.' Bij deze activiteit passen leerlingen bijvoorbeeld de isolatiestrategie toe, door in de hangmobiel van figuur 3 eerst aan beide kanten twee rode balletjes weg te halen, en vervolgens beide kanten te delen door twee, zodat zichtbaar wordt dat één zwart balletje even zwaar is als drie witte. Ook zien we de herstructureerstrategie terug, waarbij één zwart balletje van kant wisselt met drie witte balletjes.



figuur 3 De hangmobiel

Hangmobielen op papier

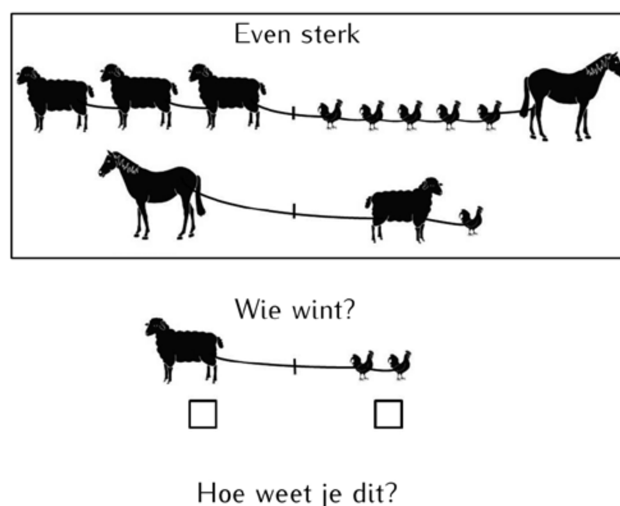
Een mooi vervolg hierop is een activiteit met representaties op papier. De docent begint met het aanbieden van één hangmobiel, om vervolgens twee hangmobielen aan te bieden waarvan leerlingen de informatie moeten combineren om een derde hangmobiel te creëren, zie figuur 4. Bij deze opdracht passen leerlingen bijvoorbeeld substitutie toe, waarbij ze drie rode balletjes vervangen door zes blauwe balletjes. Vervolgens zetten ze dit om naar *één zwart balletje* = *drie blauwe balletjes* (isolatiestrategie).



figuur 4 Combineren van twee hangmobielen op papier

Touwtrekken

Daarna wordt in de lessenserie van context gewisseld. Leerlingen kunnen de informatie van twee vergelijkingen opnieuw combineren in een andere probleemsituatie. Een voorbeeld van zo'n andere context is een touwtreksituatie, zie figuur 5, waarbij leerlingen op basis van twee voorbeelden van touwtreksituaties moeten beredeneren wie zal winnen in een nieuwe touwtreksituatie. In deze opdracht vervangen leerlingen bijvoorbeeld het paard in de eerste vergelijking door een schaap en een kip. Bij het toepassen van deze substitutiestrategie maken ze dus gebruik van de informatie uit de tweede vergelijking. Vervolgens halen ze aan beide kanten een schaap weg (isolatiestrategie), en leiden ze af dat geldt: *één schaap* = *drie kippen*.



figuur 5 Combineren van twee touwtreksituaties

Vergelijkingen met waarden

Ten slotte kan de docent de stap maken naar het toepassen van deze strategieën op vergelijkingen waarin ook waarden aan bod komen, zie figuur 6. Deze vergelijkingen kunnen in eerste instantie pictogrammen bevatten, en in een later stadium letters. Door gebruik te maken van het = - teken als symbool voor de gelijkheid in de vergelijking, wordt al een eerste stap gezet naar het oplossen van vergelijkingen in formele, symbolische notaties. Dit kan geleidelijk uitgebouwd worden. Ook bij deze meer formele vergelijkingen met waarden gebruiken leerlingen de eerder genoemde strategieën.
Zo vervangen ze in de opdracht uit figuur 6 bijvoorbeeld de drie scharen door de waarde 12 (substitutiestrategie), waardoor ze af kunnen leiden dat twee rekenmachines €10 kosten.

3 + 2 = € 22

€ 4 = 1

Vul de prijs in

= € ...... = € ......

Hoe weet je dit?

figuur 6 Combineren van (informele) vergelijkingen waarin ook waarden aan bod komen

Resultaten

De eerste resultaten van ons onderzoek in groep 7 laten zien dat de context van de fysieke hangmobiel leerlingen de mogelijkheid biedt zich de algebraïsche strategieën van herstructureren, isoleren en substitueren eigen te maken. De lichamelijke ervaringen blijken leerlingen een goede basis te geven om complexere problemen op te lossen. Het algebraïsch redeneren dat ten grondslag ligt aan het oplossen van zulke problemen speelt een belangrijke rol binnen het verdere wiskundeonderwijs op de middelbare school.

Over de auteur

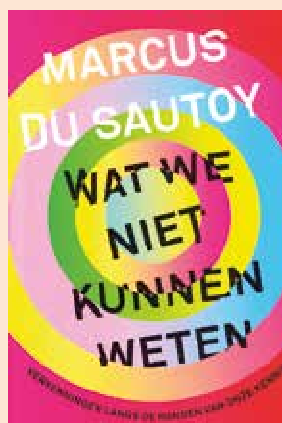
Mara Otten is promovendus van Marja van den Heuvel-Panhuizen en Michiel Veldhuis bij de Freudenthal Group for research into the didactics of mathematics. Haar onderzoek richt zich op algebraïsch redeneren in het primair onderwijs. E-mailadres: M.Otten@uu.nl



BOEKBESPREKING

WAT WE NIET KUNNEN WETEN

Ger Limpens
Ernst Lambeck

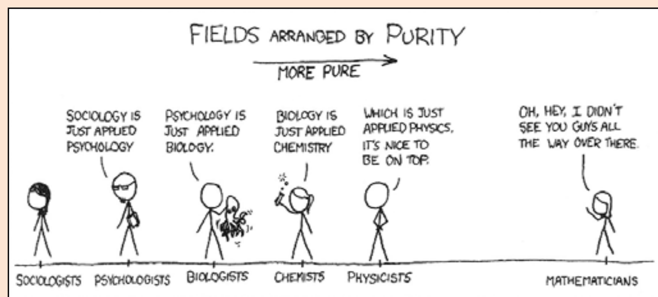


Titel: Wat we niet kunnen weten
Ondertitel: Verkenningen langs de randen van onze kennis
Auteur: Marcus du Sautoy
Uitgever: Uitgeverij Nieuwezijds (2017)
ISBN 978-90-5712-418-1, 408 pagina's, softcover
Prijs: € 29,95

Op 30 mei 2017 presenteerde Uitgeverij Nieuwezijds in NEMO het nieuwe boek van Marcus du Sautoy. Bij die presentatie ontmoetten Ernst Lambeck en Ger Limpens elkaar. Ter plekke werd de basis gelegd voor het gezamenlijk schrijven van een recensie van het aldaar gepresenteerde boek. Nadat beiden het boek deze zomer hadden gelezen, spraken ze elkaar tijdens een etentje in Utrecht over het boek. Een recensie in de vorm van een fictieve dialoog.

Enorme diversiteit

- Wat vond je van het boek?
Bij het lezen van de inleiding raakte ik erg enthousiast. Maar verder lezend kwam ik mezelf wel vaak tegen. En nadat ik het gelezen had, vroeg ik me af wat ik nu eigenlijk had gelezen. En speelde de vraag in hoeverre dit nu over wiskunde ging. Bij tweede lezing anderhalve maand later constateerde ik dat ik heel veel alweer vergeten was, niet zo vreemd gezien de enorme hoeveelheid en diversiteit van de verstrekte informatie. Natuurkunde, biologie, filosofie, van alles passeert de revue, zie figuur 1. Maar ook realiseerde ik me bij tweede lezing dat er wel voortdurend wiskunde onder zit.
- Ja, zo verging het mij ook. Ik vond het vervolgens wel didactisch heel knap om te zien hoe hij allerlei zware,



figuur 1

wiskundige, maar ook niet-wiskundige zaken, heel begrijpelijk voor het voetlicht weet te krijgen. Zo vond ik bijvoorbeeld het verhaal hoe Mendelejev tot zijn periodiek systeem kwam erg helder en trouwens ook heel inspirerend. En ook heel fraai vond ik de wijze waarop Du Sautoy, gebruikmakend van de macht der herhaling, bijvoorbeeld die dobbelsteen en dat potje uranium als een rode draad door zijn verhaal weet te weven.
– Wat betreft dat begrijpelijk maken: wat ik heel knap vond was dat hij de lezer voor zich in weet te nemen door zelf aan te geven dat die moeilijke natuurkundige thema's ook voor hem vaak behoorlijk ondoorgrondelijk zijn en soms ook blijven. En verder zit er, zo merkte ik dus bij die tweede lezing heel nadrukkelijk, voor mij zoveel in dat boek! De enorme diversiteit zorgde er waarschijnlijk in eerste instantie voor dat ik niet alles op waarde schatte. Je treft daar bijvoorbeeld zinnen aan waar je echt een tijdje op zou willen kauwen of zelfs discussiëren met anderen, collega's bijvoorbeeld. Zomaar een zin uit het boek: '*... Maar de irrationale aard van dit getal (π) houdt in dat het in de echte wereld alleen maar kan worden benaderd. En toch heeft het in onze geest een realiteit, iets wat exact kan worden gedefinieerd en logisch worden verkend. Maar waar is het dan?*' En zo tref je er talloze aan. Al met al uiteindelijk: wat mij betreft een aanrader.

Randen van onze kennis

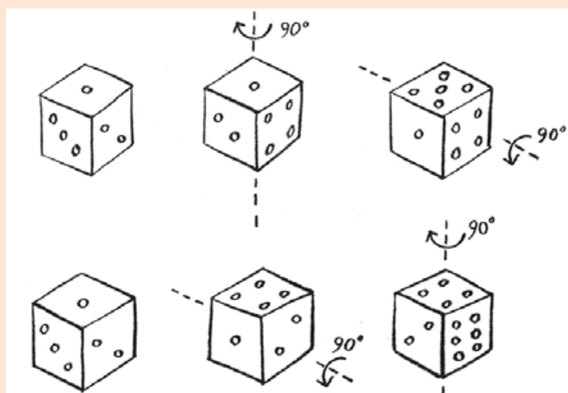
– Zeker waar maar ik zou er toch wel hier en daar een kanttekening bij willen plaatsen. Volgens de ondertitel van het boek zijn dit verkenningen langs de randen van onze kennis. Het boek is ook verdeeld in acht randen, van de nulde tot de zevende rand. Maar mij was eigenlijk, ook niet bij tweede lezing, niet precies duidelijk wat de thema's van de verschillende randen waren. Elke rand heeft wel een naam die suggereert dat het onderwerp met die naam de hoofdmoot is in die rand, maar dat is bij nader inzien volgens mij niet echt zo. En daar komt nog bij dat verschillende randen in twee of meer hoofdstukken verdeeld zijn en die hoofdstukken vaak weer in delen met aparte titels. Ook die structuur leverde mij geen nieuwe inzichten op. Waarmee ik niet wil zeggen dat het boek ongestructureerd is, want dat is het zeker niet. Dat steeds terughalen van eerder genoemde objecten en thema's maakt het boek heel erg hecht en goed leesbaar. Wat er verder nog voor zorgt dat het heel leesbaar is, is zijn stijl. Hij schrijft, bijzonder voor een wiskundige in mijn beleving, heel breed en rijk. Hij haalt er van alles bij en dat is heel leuk, zeker als je je realiseert dat hij toch altijd weer terugkomt op zijn kernvraag: zijn er dingen die we nooit zullen kunnen weten? En zo ja, kunnen we ons daar een voorstelling van vormen?

Voor wie?

– Toch nog even terug naar wat ik zojuist zei: ik vond het dus een aanrader maar ik heb me zoals gezegd bij eerste lezing afgevraagd in hoeverre ik hier nu over wiskunde las. Dat dit bij tweede lezing meeviel nam echter niet weg dat ik toch moet constateren dat mij niet duidelijk is geworden, zoals wel vaker bij boeken van dit type, voor wie het nu is geschreven: er wordt soms op basaal niveau uitleg gegeven aan zaken die een academisch opgeleide wiskundedocent ongetwijfeld allang weet, maar op andere momenten worden dan weer heel wat zwaardere wiskundige thema's min of meer als bekend verondersteld. Dat wringt een beetje. Al met al moet ik mijn standpunt 'een aanrader' nuanceren in die zin dat ik denk dat dit eigenlijk alleen goed te lezen, en dus aan te raden is, voor die academisch opgeleide wiskundige.
– Naar aanleiding daarvan: welke lezers van *Euclides* zouden hierin geïnteresseerd kunnen zijn? Er zijn wiskundedocenten die je geen plezier doet met een wiskundig getint boek. Zo iemand hoort dus duidelijk niet bij de doelgroep, toch?
– Nee, maar het lijkt me onvermijdelijk dat je, behalve een zekere vooropleiding, ook al een zeker plezier in het lezen over wiskunde moet hebben. Ook ik ken dergelijke collega's maar die lezen al helemaal geen boeken dus dan houdt het echt op.

Pythagoras en Einsteins relativiteitstheorie

– Dat begrijp ik maar je kunt je toch de vraag stellen wat een wiskundedocent hiervan op zou kunnen steken voor zijn onderwijs. Met die vraag in het achterhoofd heb ik ook wel voortdurend het betoog proberen te volgen. En dan is er nogal wat waar je je voordeel mee kunt doen. Zo wordt bijvoorbeeld op een voor mij verrassende manier de stelling van Pythagoras ingezet om de tijdsvertraging bij einsteiniaans reizen met de snelheid van het licht te berekenen. Nooit gedacht of bedacht dat je hier die eeuwenoude stelling bij zou kunnen inzetten. Of, om een totaal ander voorbeeld te noemen: dat de volgorde van achtereenvolgende rotaties van belang is voor het eindresultaat wordt heel mooi geadstrueerd in het voorbeeld van de draaiende dobbelsteen, zie figuur 2. Een prachtig voorbeeld van niet-commutatitiviteit waarmee je mogelijk je didactisch spectrum als docent fraai kunt uitbreiden, iets wat je kunt gebruiken bij het aankaarten van het niet-commutatief zijn bij matrixvermenigvuldiging of bij het inverteren van functies.
In elk geval voor mij was dat een eyeopener.



figuur 2

– Nu je dat zo ter sprake brengt: voor mij was die relativistische formule

$$s = \frac{u+v}{1+uv/c^2}$$

voor de combinatie van snelheden u en v nieuw. Niet dat ik hem nu begrijp, maar het is wel heel fraai om aan de formule te zien dat s voor kleine waarden van u en v nauwelijks afwijkt van de som van u en v maar ingeval u en v in de buurt van de lichtsnelheid c komen, er sprake is van een limietsituatie. Hier werd ik dan weer door verrast. En volgens mij ook weer heel goed te gebruiken in de bovenbouw van het vwo om asymptotisch gedrag aan te kaarten.

– Die formule deed mij denken aan de formule van de Lorentzcontractie maar die wordt niet vermeld in *Wat we niet kunnen weten.* Overigens: nog even terug naar de draaiende dobbelstenen: dat fragment inspireerde mij tot een opgave waar ik ongetwijfeld nog wel eens mijn voordeel mee kan doen in didactisch verband. Zo kan zo'n boek dus werken!

God

– Maar laat ik eens een heel ander aspect van het boek aankaarten. Iets waar Du Sautoy regelmatig mee aan de slag gaat, is de regelmatige referentie naar god of naar een godsbesef. Het is duidelijk dat Du Sautoy atheïst is. De enige keer dat hij zich religieus noemt, neemt hij een loopje met degene die hem daarnaar vraagt. Maar voor een atheïst is het toch op zijn minst bijzonder te noemen dat hij zoveel plaats inruimt voor iets wat in zijn beleving niet bestaat.

– Inderdaad, waarom hij in zijn eigen boek op zoveel plekken moeite doet om aandacht te geven aan dat thema en zelfs een eigen invulling van god probeert te geven, eigenlijk tegen zijn eigen beter weten in, ontgaat me wel. Het riep bij mij hier en daar een lichte irritatie op. Maar goed, het zij hem vergeven want ik heb verder wel heel veel gekregen, al lezende. En op het moment dat hij in een reactie op een mogelijk scheppingsverhaal uitdrukkelijk kiest voor het multiversum, met een variant op het Scheermes van Ockham als argument, kan ik het alleen maar roerend met hem eens zijn.

Kermiskleuren

– Is dat het enige punt van kritiek dat je op dit boek zou willen formuleren? Of zijn er nog andere dingen die je, na tweede lezing, minder geslaagd vindt? Want ik hoor je bijna alleen maar de loftrompet steken.

– Nou ja, als ik desgevraagd toch moet zeuren: ik heb me een heel enkele keer gestoord aan de niet altijd even fraaie typografie. Het ziet ernaar uit dat die niet gedaan is of gecontroleerd is door iemand met een wiskundige achtergrond. Een enkele keer komt het zelfs voor dat een 0 is weergegeven door een kleine letter o. En een en dezelfde variabele wordt weleens in verschillende lettertypes weergegeven, met name als die variabele zowel in de lopende tekst als in een losstaande formule figureert. Schoonheidsfoutjes maar niet meer dan dat wat mij betreft. Een andere kanttekening wil ik trouwens ook nog wel maken: ik vond het ontwerp van de voorkant van het boek spuuglelijk: wat een kermiskleuren. Ik was blij dat ik dat niet zag bij het lezen in het boek…

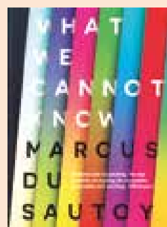
– Tsja, wat betreft dat voorkantontwerp, nu je het zegt: de Engelse uitgave is inderdaad veel minder schreeuwerig, zie figuur 3. Die zou je kunnen zien als een aantal lamellen die de nodige kennis doorlaten, maar zaken die we niet kunnen weten tegenhouden. Ook over de afbeeldingen die erin zijn opgenomen zijn, valt niets te mopperen. Het zijn er niet veel maar ze zijn zinvol en helder vormgegeven.

– Je zou daarover kunnen opmerken dat het opvallend is dat die afbeeldingen heel vaak het niveau van een schets niet ontstijgen.

– Ja, maar dat vind ik nu juist helemaal geen probleem. Hoewel je vandaag de dag digitaal de meest oogstrelende, verblindende plaatjes kunt maken, zit ik daar helemaal niet op te wachten. Zo'n eenvoudige, handgemaakte schets geeft vaak heel veel beter de essentie van een concept weer. Toch?

– Ik kan het alleen maar met je eens zijn. Ik vraag de rekening.

– Dat lijkt me heel verstandig. Du Sautoy heeft ons dan wel duidelijk gemaakt dat we niet alles kunnen weten maar dit lijkt me een goed beantwoordbare vraag.



figuur 3

Over de recensenten

Ernst Lambeck is docent wiskunde aan het Newmancollege in Breda en redacteur van *Euclides.*
E-mailadres: *elambeck@newmancollege.nl*
Ger Limpens is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: *ger.limpens@gmail.com*

HET WERK VAN WILLEM KLOPPERS

Jan Aarts

Vorig jaar bestond De Stijl honderd jaar. Een van de vele kunstenaars die door De Stijl is beïnvloed, is Willem Kloppers. Jan Aarts bezocht een overzichtstentoonstelling van zijn werk, en ging op zoek naar wiskunde in zijn werk.



Willem Kloppers
(1937 – 2014)

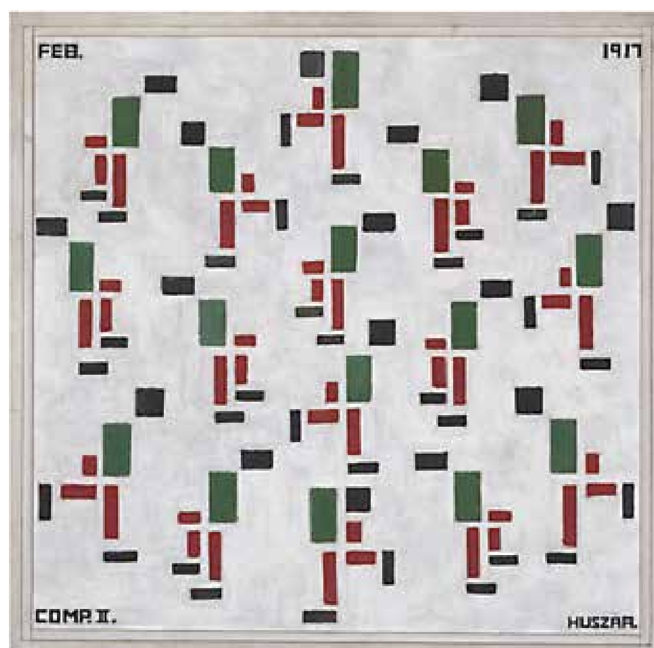
Van chaos naar orde

In de Haagse Kunstkring was in de maand Mei 2017 een overzichtstentoonstelling van het werk van beeldend vormgever Willem Kloppers (1937 - 2014) onder de titel 'Van chaos naar orde'. Van 1954 tot 1959 bezocht Willem Kloppers de Koninklijke Academie voor Beeldende Kunsten in Den Haag en in 1962 bezocht hij de Academie de la Grande Chaumière in Parijs. Uit de toelichting op de tentoonstelling door Ankie de Jongh-Vermeulen kies ik twee statements van Willem Kloppers die als leidraad voor dit artikel dienen.

Bij de realisering van mijn concepten zijn mathematiek, cijfers, getallen en rekenkundige formules de basis-elementen. De vorm van mijn objecten is zelden geen vierkant en beoogt een integratie en samenhang met architectuur en de ruimtelijke omgeving. In de optimaal gereduceerde vorm tracht ik helderheid, het elementaire en de maximale zeggingskracht van vorm en duiding te bereiken
Tentoonstelling *Geometrisch. Concreet II*, Museum voor Constructieve en Concrete Kunst, 2011

W.K. = Wetenschap en Kunst
W.K. = Wiskunde en Kunst
W.K. = Willem Kloppers
Theorema: toeval bestaat
Tentoonstelling *De bomen van Pythagoras*,

Mondriaanhuis, 2003



figuur 1 Vilmos Huszár, Compositie II *Schaatsenrijders*

Perspectief, verhoudingen en vlakvullingen

Voordat we nader ingaan op het werk van Willem Kloppers, stellen we de welhaast overbodige vraag: is er wel een verband tussen wiskunde en kunst? Het antwoord op die vraag hangt af van zowel de kennis van de wiskunde als van de aard van de kunst. Bij de klassieke schilderkunst zijn er tal van verbindingen met de wiskunde. Denk maar aan de toepassingen van de perspectiefleer en de voorkeur voor bepaalde verhoudingen tussen lijnstukken, meestal de gouden verhouding. Bij het werk van Escher ligt het weer anders. Geïnspireerd door de regelmatige wanddecoraties in het Alhambra te Granada, legt Escher zich toe op de vervaardiging van regelmatige vlakvullingen waarbij een bepaald motief in twee verschillende richtingen herhaald wordt. De vlakvullingen kunnen onderscheiden worden op de wijze van de kristallografie door middel van de mogelijke aanwezigheid van draaiingen, spiegelingen en glijspiegelingen. Later heeft Escher deze werkwijze uitgebreid door naast de euclidische meetkunde ook de hyperbolische meetkunde te gebruiken. Bij veel afbeeldingen van Escher is de wiskundige structuur zó dominant dat met de methoden van de kristallografie de onderliggende structuur gedetermineerd kan worden. Dit maakt het werk van Escher zo geliefd bij kristallografen en wiskundigen. De van origine Hongaarse schilder Huszár heeft met zijn compositie II (*Schaatsenrijders*), zie figuur 1, een vrije en frivole variant van de vlakvullingen gecreëerd.

Ik merk nog op dat ik de illustraties uit de complexe dynamica, zoals die van Mandelbrot- en Fatou-verzamelingen, niet als kunst beschouw, hoe fraai en kleurrijk ze ook mogen zijn. Het zijn illustraties bij de wiskunde en het is geen kunst; noem het maar wiskunst.

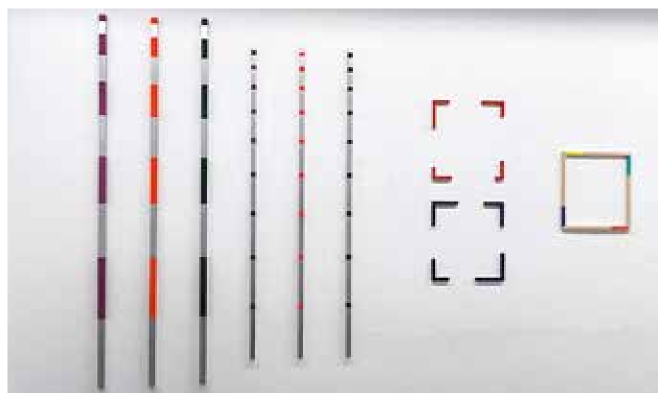
Wiskundige principes

De op de tentoonstelling getoonde werken, alsmede hun schikking, duiden op achterliggende wiskundige principes. In het bijzonder betreft het de zogenaamde kwatrijn-objecten. Bij een bezoek aan Waldo en Elise Kloppers, zoon en zus van Willem, heb ik aantekeningen van Willem mogen inzien. Daarin lees ik:

een kwatrijn is een 4-regelig vers of een strofe van vier regels als deel van een sonnet. Met toepassing van dichterlijke vrijheid en het decimale stelsel worden de lyrische dichtregels van het sonnet en de 4-regelige dichtvorm van de kwatrijnen omgezet in cijfers en getallen welke vervolgens worden getransformeerd in afmetingen in centimeters. Voorbeelden van mathematische kwatrijnen zijn 2,5 - 2,5 - 2,5 - 2,5 en 01 - 02 - 03 - 04 beide met som 10. Verder: 05 - 05 - 05 - 05 en 3,5 - 4,5 - 5,5 - 6,5 en 02 - 04 – 06 - 08 en 0,5 - 3,5 - 6,5 - 9,5, alle met som 20. Een mathematisch kwatrijn is zo het begin van een rekenkundige rij.

Staven en vierkanten

Op de eerste wand van de tentoonstelling zie ik staven en vierkanten, zie figuur 2, Ik kon de figuur niet op internet vinden en heb hem dus, zoals toeristen doen, door het oog van mijn smartphone bekeken. Bij het linker drietal staven lopen de lengten zowel van de gekleurde als van de blanco banden van boven naar beneden op als de getallen 1, 2, 3 , ... Bij het rechter drietal staven lopen alleen de lengten van de blanco staven op deze wijze op, en dienen de gekleurde banden slechts als afscheidingen. Bij de vierkanten ter rechterzijde heb ik geen wetmatigheden precies kunnen vaststellen.

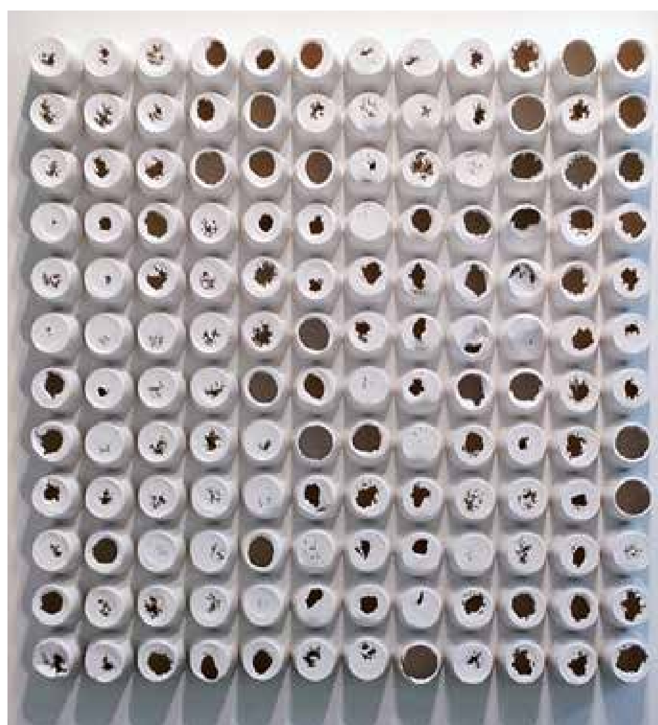


figuur 2 Willem Kloppers, Staven en vierkanten

144 bekers

Een van de werken beeldt een vierkant bord uit van 24 bij 24 met daarop 144 omgekeerde bekertjes met diameter 2, zie figuur 3. De bekers sluiten op elkaar aan en iedere beker grenst aan vier andere. Zou je nu, zo vraag ik me af, op dit bord ook 150 bekers kunnen plaatsen? In de uitgebeelde situatie staan de bekers niet in de dichtste pakking. Ik kan van de tweede rij de eerste beker weg halen en vervolgens de overige elf bekers over een afstand 1 naar links en dan naar boven schuiven en ten slotte de derde rij naar boven schuiven. En zo verder met de vierde en vijfde rij, enzovoort. Je neemt om de rij telkens één beker weg, maar uiteindelijk (inderdaad, nadat de negende rij onder handen is genomen) maak je een hele rij vrij voor wel twaalf bekers.

> 'MATH IS IN THE MIND OF THE BEHOLDER.'



figuur 3 Willem Kloppers, Zonder titel

Schaduwwerking

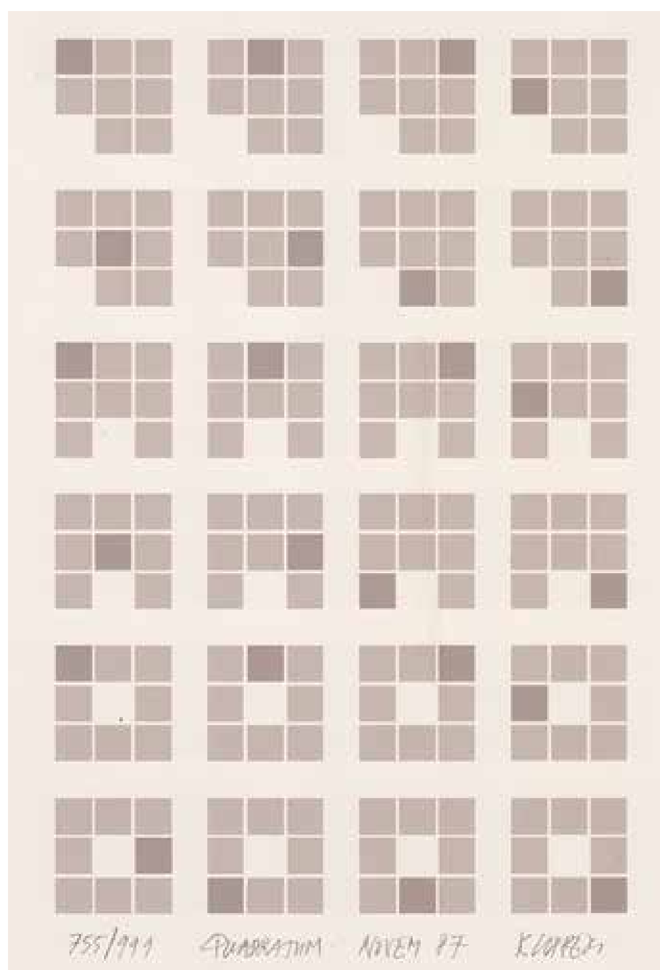
Een wand van de tentoonstelling bestaat, naar het schijnt, uit gevlochten papieren matjes. De minieme hoogteverschillen tussen de stroken worden zichtbaar door schaduwwerking. Deze werken doen denken aan de kunst van Jan Schoonhoven van de Nulgroep. Dat geldt ook voor het werk dat is afgebeeld in figuur 4. Het betreft hier een rij vierkanten één bij één aan de binnenzijde langs de rand van een vierkant vier bij vier.



figuur 4 Willem Kloppers, Zonder titel

Rangschikking

Ten slotte bespreek ik nog twee werken die niet op de expositie werden tentoongesteld. Figuur 5 toont 24 vierkanten van 3 bij 3, elk vierkant met zeven grijze tegels, een witte en een zwarte tegel. Getoond zijn alle mogelijke posities van de witte en de zwarte tegels. De witte tegel kan in een hoek staan, zoals in de bovenste twee rijen, of in het midden van een ribbe, zoals in de middelste twee rijen, of in het midden van het vierkant zoals in de onderste twee rijen. Bij elke positie van de witte tegel zien we de acht mogelijke posities van de zwarte tegel uitgebeeld.



figuur 5 Willem Kloppers, *Quadratum novem*

Magisch vierkant

De laatste afbeelding toont een kunstwerk dat ik voor het eerst zag tijdens het bezoek aan Waldo Kloppers, zie figuur 6. Ik ben blij dat ik het niet heb gemist. Het is een ruimtelijke voorstelling van het magische vierkant 3 bij 3. In het grondvlak zijn de negen vierkanten gemarkeerd en de hoogten van de verticale staven geven de getalswaarde aan van het vierkant waarop de staaf staat.



figuur 6 Willem Kloppers, Magisch vierkant
Foto: Elise Kloppers

Het werk van Willem Kloppers behoort tot de abstracte kunst. Het handelt immers over rangschikking van vierkanten en verbanden met getallenrijen. Bij het bord met koffiebekertjes belandde ik ongemerkt in een wiskundige opgave.
Ik weet niet of dat de bedoeling van de kunstenaar is geweest. Dat is ook niet relevant. Inderdaad:
Math is in the mind of the beholder.

Over de auteur

Jan Aarts is gepensioneerd hoogleraar (wiskunde, TU Delft). Van zijn hand verschenen bij uitgeverij Epsilon o.a. *Meetkunde, facetten van de planimetrie en stereometrie* (2000), dat *als Plane and Solid Geometry* verschenen is bij Springer (2008), en het stripboek *Topologie door zien* (2009).

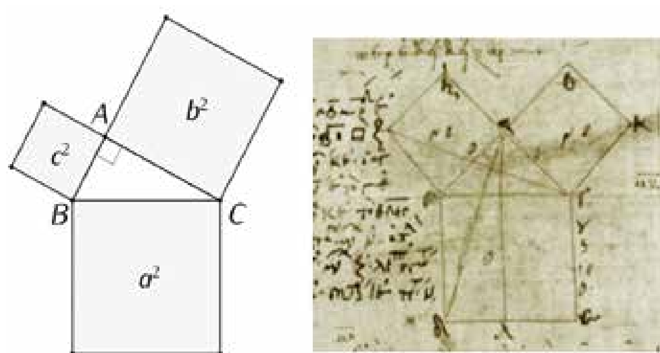
EEN DRIEHOEK EN TWEE VIERKANTEN

Dick Klingens

Vierkanten plaatsen op twee zijden van een driehoek. Daarmee kun je de stelling van Pythagoras aanschouwelijk maken, maar het levert nog veel meer boeiende stellingen op. Dick Klingens neemt ons mee naar Frankrijk en Rusland voor een aantal mooie voorbeelden.

Het houdt bij ons op bij...

Natuurlijk, met vierkanten geplaatst op de zijden van een rechthoekige driehoek kun je de stelling van Pythagoras formuleren als:[1, 2]
De som van de oppervlaktes van de vierkanten op de rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek is gelijk aan de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde van die driehoek.



figuur 1a (links) en 1b (rechts)

In het meetkundeonderwijs in het vo (zeker in de onderbouw) houdt het gebruik van vierkanten bij driehoeken daarmee wel zo'n beetje op. Maar dat hoeft in dit tijdschrift natuurlijk niet.

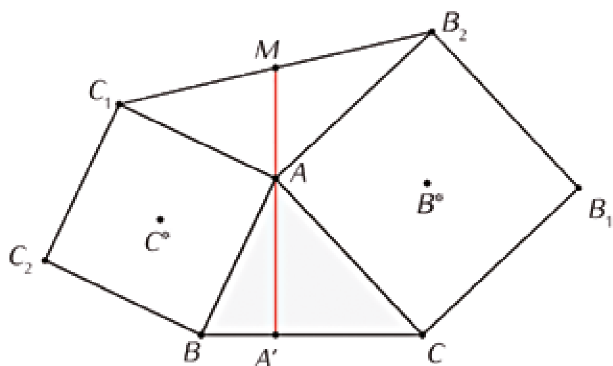
Neem een willekeurige driehoek ABC en beschrijf daarop uitwendig vierkanten op twee van de zijden. In figuur 2 zijn dat het vierkant CB_1B_2A met middelpunt B^* en het vierkant BAC_1C_2 met middelpunt C^*. Het punt M is het midden van het lijnstuk B_2C_1. Toon aan dat MA (in A') loodrecht staat op BC.

Je kunt hier natuurlijk direct verder lezen – dat bewijs komt er zeker aan. Maar je kunt ook even wachten, en dan eerst zelf bedenken hoe dat bewijs er uit zou kunnen zien...
Wellicht is tijdens dat wachten ook de gedachte opgekomen om het een met het ander om te draaien: ga uit van de hoogtelijn AA' en bewijs dat deze door het midden M van B_2C_1 gaat.

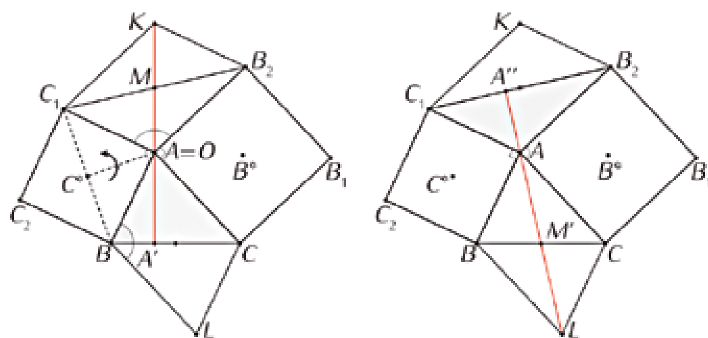
Het ingevoegd parallellogram

Hoe ook gedraaid, met 'hoeken jagen' lukte het mij niet snel genoeg. En over draaien gesproken. Ik hou het hier op een rotatie R, en wel die met centrum C^* over een hoek van 90°, waarbij ik gebruik maak van de volgende (zeker wel) bekende eigenschap.

Stelling1. Is l' het beeld van een rechte lijn l bij een rotatie over een hoek van 90°, dan staan l en l' loodrecht op elkaar.



figuur 2



figuur 3a (links) en 3b (rechts)

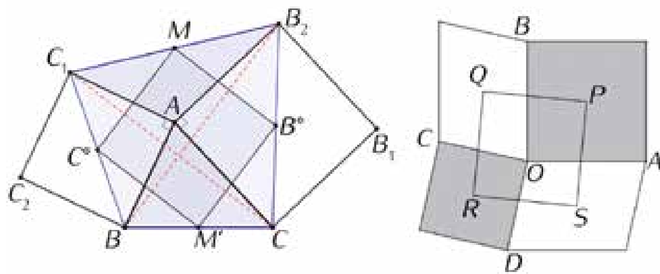
Dan is in ieder geval, zie figuur 3a, $R(A) = C_1$, $R(B) = A$, zodat R(lijnstuk AB) = lijnstuk C_1A.
Maar komen we hiermee dan verder? Zoveel andere lijnstukken zijn er niet waarvan direct duidelijk is dat ze onder R origineel en beeld zijn.
Voor het bewijs teken ik er twee driehoeken zó bij, dat $BLCA$ en AB_2KC_1 parallellogrammen zijn. Ik noem AB_2KC_1 het ingevoegde parallellogram (ingevoegd tussen beide vierkanten). Daarvan is trouwens AK een diagonaal.

We kunnen de beoogde eigenschap dan als volgt formuleren.

Stelling 2. Als op twee zijden van een driehoek vierkanten zijn geplaatst, dan staat de lijn die door het gemeenschappelijke hoekpunt gaat en door het middelpunt van het ingevoegde parallellogram, loodrecht op de overstaande zijde van dat hoekpunt.

Opmerking. Als we in figuur 3b naar driehoek AB_2C_1 kijken, dan zijn op de zijden AB_2 en AC_1 daarvan vierkanten geplaatst. $ABLC$ is hier het ingevoegde parallellogram. En volgens stelling 2 staat de lijn AM' (M' is het midden van BC) in A'' loodrecht op B_2C_1.

Bewijs van stelling 2. Nu is, en we zijn weer terug in figuur 3a: $\angle ABL = \angle C_1AB_2$, omdat beide de hoek A als supplement hebben. En omdat $AB_2 = AC = BL$ is, is direct duidelijk dat $R(BL) = AB_2$. En dan is $R(BLCA) = AB_2KC_1$, zodat ook $R(BC) = AK$.
Met andere woorden, conform stelling 1: de drager van AK – en dat is de lijn AM – staat loodrecht op BC. En daarmee is stelling 2 bewezen.



figuur 4a (links) en 4b (rechts)

Gevolg. $BC = AK$ en $AL = C_1B_2$. Maar er is meer!
Zie daartoe figuur 4a. De punten M', B^*, M, C^* zijn de middens van de zijden van vierhoek BCB_2C_1.
Daarmee is $M'B^*MC^*$ een parallellogram (van Varignon [3]). Als we roteren met A als centrum en weer over een hoek van 90°, dan is: $R(C_1) = B$, $R(C) = B_2$, zodat $R(C_1C) = BB_2$. En dan staat C_1C loodrecht op BB_2, en ook is $C_1C = BB_2$.
Omdat dit de diagonalen zijn van de vierhoek BCB_2C_1, is het Varignon-parallellogram een vierkant (zo is er toch nog een derde vierkant).

Opmerking. In de appendix [1] staan nog twee andere bewijzen van stelling 2.

Maar in Frankrijk

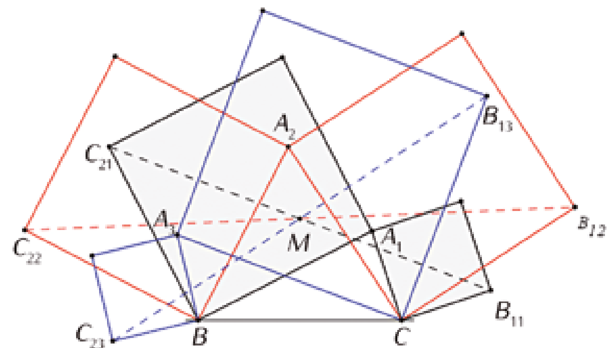
Ik trof de volgende opgave (uit het jaar 2003) aan, [4] zie figuur 4b:

> ***Exercice 4***
> *Beschouw twee vierkanten (in grijs) met een gemeenschappelijke hoekpunt en de constructie van twee parallellogrammen (in wit). Laat zien dat de middelpunten van vierkanten en parallellogrammen de hoekpunten van een vierkant zijn. Neem daartoe een assenstelsel met oorsprong O en ken daarbij complexe getallen toe aan de punten A, B, C en D.*

Ik laat het aan jezelf over dit probleempje *zonder* complexe getallen op te lossen.
In de appendix [1] staat de originele tekst van de *exercice* en er is, naast een oplossing *met* complexe getallen, ook een analytische oplossing in opgenomen.

Toch ook bij ons

We bekijken opnieuw vierkanten op twee zijden van een driehoek, maar nu enigszins dynamisch; zie figuur 5 waarin drie momentopnames weergegeven zijn.

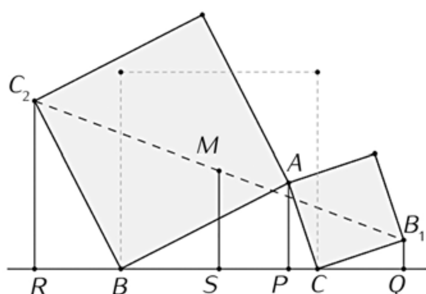


figuur 5

We zien in figuur 5 driehoeken A_kBC met $k = 1, 2, 3$. De lijnstukken $B_{1k}C_{2k}$ hebben blijkbaar alle hetzelfde midden, het punt M. De plaats van M hangt niet af van de plaats van het punt A. Deze eigenschap wordt in de (buitenlandse) literatuur meestal de stelling van Bottema [5] genoemd.

Stelling 3 (stelling van Bottema). Worden op de zijden AB en AC van driehoek ABC vierkanten beschreven en zijn B_1 en C_2 de hoekpunten daarvan tegenover A, dan is het midden M van het lijnstuk B_1C_2 onafhankelijk van de ligging van het punt A.

Bewijs. Zie figuur 6. De punten P, Q, R, S zijn de projecties van A, B_1, C_2 en M op de lijn BC. Eenvoudig is in te zien dat de driehoeken ABP en BC_2R congruent zijn (ZHH). Hetzelfde geldt voor de driehoeken APC en CQB_1. Uit die congruenties volgt dan: $C_2R = BP$ en $B_1Q = CP$. In het rechthoekig trapezium QB_1C_2R is het lijnstuk MS de middenparallel, zodat: $MS = \frac{1}{2}(C_2R + B_1Q)$.
En dan is ook $MS = \frac{1}{2}(BP + CP) = \frac{1}{2}BC$
Waaruit blijkt dat de ligging van M alleen afhangt van de ligging van de punten B en C (M is het middelpunt van het vierkant op het lijnstuk BC).



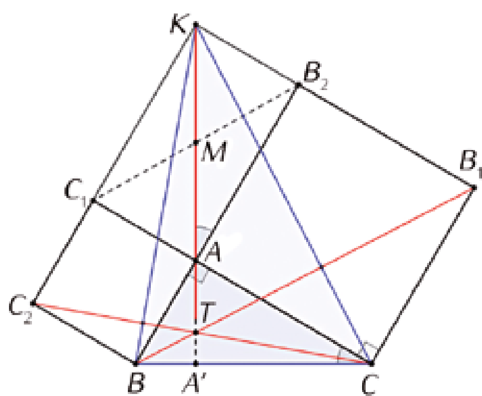
figuur 6

Intermezzo?

Voordat naar een rechthoekige driehoek wordt overgestapt, kun je in de appendix [1] (paragraaf 3) nog naar twee zelf op te lossen opgaven kijken.

In een rechthoekige driehoek

En nu toch maar naar een rechthoekige driehoek...



figuur 7

Ook hierbij zijn op de zijden van de in A rechthoekige driehoek ABC vierkanten geplaatst. Het ingevoegde parallellogram, nu een rechthoek, is eveneens weergegeven; en dit alles met de gebruikelijke naamgeving van de punten. We zullen bewijzen:

Stelling 4. In de configuratie van figuur 7 geldt:
a. de lijnen KA, BB_1 en CC_2 zijn concurrent;
b. deze lijnen zijn de hoogtelijnen van driehoek KBC.

Opmerking. Deze eigenschappen gelden overigens óók in een niet-rechthoekige driehoek. Als je jezelf de gelegenheid wilt bieden even na te denken over het bewijs van deze eigenschappen, dan is nú het moment...
Bewijs. Bij het punt A zijn de hoeken KAB_2 en CAA' elkaars complement. In driehoek $A'CA$ is dat het geval met de hoeken CAA' en ACA'. Daardoor is: $\angle KAB_2 = \angle ACA'$. Zodat wegens $AK = CB$ (zie het gevolg van stelling 2) blijkt dat de driehoeken ACK en CB_1B congruent zijn (ZHZ). Van deze driehoeken staan twee paar overeenkomstige zijden loodrecht op elkaar.[7] En dan is dat ook met het derde paar, te weten KC en BB_1, het geval. BB_1 is dus hoogtelijn van driehoek KBC. En analoog is CC_2 dat ook. En van KA' wisten we al eerder dat het een hoogtelijn is. En dat de hoogtelijnen van een driehoek concurrent zijn...

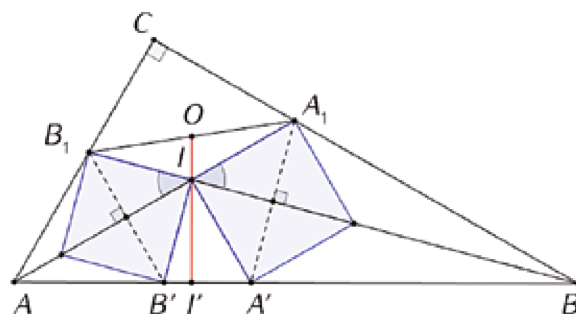
Opmerking. In de appendix [1] (paragraaf 4a) staat een ander bewijs van onderdeel a van stelling 4.

En ook in Rusland

De aanleiding voor het schrijven van dit artikel is gelegen in het feit dat ik, alweer een tijdje geleden, tegen het volgende probleem aanliep.[8] Van het een kwam zo het ander:

D. Shvetsov (8 punten): Bisectors AA_1 and BB_1 of a right triangle ABC ($\angle C = 90^o$) meet at a point I. Let O be the circumcenter of the triangle CA_1B_1. Prove that $OI \perp AB$.

Geformuleerd als stelling – en ik noem die maar naar de opsteller van het vraagstuk, zie figuur 8:



figuur 8

Stelling 5 (stelling van Shvetsov). Zijn in een in C rechthoekige driehoek ABC de punten A_1 en B_1 de voetpunten van de elkaar in I snijdende bissectrices van de hoeken A en B en is O het midden van A_1B_1, dan staat OI loodrecht op AB.
Bewijs. Een oplossing kan worden gevonden door toepassing van hetgeen hierboven staat. Maar, zijn in figuur 8

de vierhoeken op hun diagonalen A_1A' en B_1B' inderdaad vierkanten?
Uit 'hoeken jagen' rond het punt I blijkt in ieder geval dat $\angle BIA_1 = \angle AIB_1 = 45°$.
En omdat AA_1 en BB_1 bissectrices zijn, liggen de spiegelbeelden van A_1 en B_1 in die bissectrices op AB. Dan zijn de driehoeken $IA'A_1$ en $IB'B_1$ gelijkbenig en rechthoekig. Waarmee bovenstaande vraag beantwoord is. Ja, en dan zijn de 8 te behalen punten voor Shvetsovs vraagstuk binnen. We hebben immers vaak genoeg gezien dat OI (dit keer in I') loodrecht staat op AB.

Opmerking. In de appendix [1] staat een tweede bewijs van stelling 5. Daarin wordt gebruik gemaakt van enkele elementaire (nou ja...) eigenschappen van de ingeschreven cirkel van een driehoek.

 *vakbladeuclides.nl/936klingens*

Noten

[1] Bij dit artikel is ook een appendix beschikbaar. Zie: *http://vakbladeuclides.nl/936klingens*

[2] En dan is het uit de figuren 1a en 1b ook duidelijk dat $a^2 + b^2$ niet altijd gelijk is aan c^2...
In figuur 1b staat Nasr al-Din al-Tusi's (1201-1274) manuscript van Euclides' *Elementen* met de stelling van Pythagoras (Boek I, propositie 47).
Bron Bibliotheek Vaticaan: *http://www.ibiblio.org*
Zie de appendix[1] (paragraaf 6) voor een 'oud' bewijs van de stelling van Pythagoras.

[3] Zie ook: Klingens, D. (2001). *De stelling van Varignon, en meer.* Op de website van de auteur: *http://www.pandd.demon.nl/vierh/varignon.htm*

[4] EPF (École d'ingénieur-e-s, Sceaux, Frankrijk): *Concours terminale 1999-2008.*

[5] Naar Oene Bottema (1901-1992), hoogleraar zuivere en toegepaste wiskunde aan de Technische Hogeschool Delft (tegenwoordig TU Delft) van 1941 tot 1971. Een 'echte' dynamische illustratie is te vinden via de volgende link naar de website van Alexander Bogomolny:
http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/VisualBottema.shtml
Op die website staat ook het hier gegeven bewijs van de stelling.
Bottema illustreert 'zijn stelling' [6] (ongeveer) als volgt. Iemand heeft een schat begraven op een plek die op gecompliceerde wijze kan worden bepaald. Hij gaat uit van drie gemerkte bomen A, B en C en denkt zich CA in negatieve richting om C gedraaid tot CB_1 en BA in positieve richting om B tot BC_2. Hij kiest het midden M van B_1C_2 als bewuste plaats. Als hij later terugkomt is boom A verdwenen. De eerste poging tot opgraving heeft echter reeds succes.

[6] Bottema, O. (1959). *Verscheidenheid XXXVIII.* In: *Verscheidenheden.* Groningen: Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren / Wolters Noordhoff (1978), p. 51.

[7] Van deze eigenschap staat in de appendix [1] (paragraaf 4b) een summier bewijs.

[8] Bron: *VI Geometrical Olympiad in honour of I.F. Sharygin*, 2010.
Via: *http://geometry.ru/olimp/2010.php*

Over de auteur

Dick Klingens was van januari 2000 tot augustus 2014 (eind)redacteur van *Euclides.* Tot aan zijn pensioen in 2010 was hij ook wiskundeleraar, lerarenopleider bij het technisch beroepsonderwijs en schoolleider. Gedurende enkele jaren was hij lid van de cTWO-ontwikkelgroep meetkunde voor wiskunde B vwo (eindexamen vanaf 2018).
E-mailadres: *dklingens@gmail.com*

WERELDWISKUNDEFONDS IN SIERRA LEONE

Sister Mary Antony
Mrs. Josephine Nicol

Sierra Leone ligt aan de westkust van Afrika en is verdeeld in veertien districten, waarvan het Kono District er een is. Dit district ligt in het noordoosten van Sierra Leone. De hoofdstad is Koidu. De Cluny Free The Children Junior Secondary School bevindt zich in Sukudu Village, niet ver van Koidu. Sister Mary Antony en Mrs. Josephine Nicol doen verslag van de hulp die men kreeg van het WereldWiskunde Fonds, een bedrag van € 2928.



Wiskundeonderwijs en de oorlog

In Sierra Leone legden christelijke missionarissen de grondslag voor het onderwijs in de jaren 1800. De scholen die werden geopend, lagen meestal in de hoofdstad Freetown. Rond de jaren 1900 begon het onderwijs zich te verspreiden naar de provincies. Kono was een van de laatste districten die het moderne onderwijs omarmde. En juist toen het onderwijs zich ontwikkelde, brak de vreselijke elfjarige oorlog uit. Kono was na de oorlog een van de meest verwoeste districten in het land. Gedurende de oorlog lag het onderwijs in het hele land stil. Toen aan het einde van de oorlog onderwijsactiviteiten werden hervat, was dat nog niet het geval in het Kono District. Reeds voor de rebellenoorlog miste het wiskundeonderwijs al een goede basis. Schuld hieraan was het gebrek aan getrainde en gekwalificeerde wiskundeleraren. In het hele land was men afhankelijk van *expat* vrijwilligers als leraren wiskunde en natuurkunde. De oorlog dreef de weinige, bereidwillige, getrainde en gekwalificeerde leraren naar veilige landen. Dit heeft bijgedragen aan de langzame ontwikkeling van het land.

Onderwijs aan meisjes en vrouwen

De Sisters of St. Joseph of Cluny kwamen naar het Kono District aan het einde van de elfjarige oorlog in 2003 om bij te dragen aan de ontwikkeling van het onderwijs aan gemarginaliseerde meisjes en vrouwen. Sleutel in hun ontwikkelingsprogramma zijn een lagere school en een junior secondary school. Deze laatste bereidt leerlingen voor op de senior secondary school. De junior secondary school is een driejarige opleiding waarin wiskunde en natuurkunde verplichte vakken zijn voor het examen.
De Sisters of Cluny werken met het Cluny Diomplor Programma. Dit programma organiseert interne sessies voor leraren om zich verder te bekwamen en biedt aanvullende lessen voor leerlingen in wiskunde en andere vakken. De Sisters zijn zich ervan bewust dat wiskunde heel belangrijk is voor de ontwikkeling van hun land in de hedendaagse technologische wereld. Zij beseffen dat leerlingen moeten kunnen concurreren, zowel nationaal als internationaal. Daarom hebben zij het WwF hulp gevraagd bij de aanschaf van wiskunde tekstboeken voor leerlingen en docenten en steun bij de training van wiskundeleraren in de junior secondary school.
Zij benadrukken dat de voorbereiding van de beroepsbevolking van een land op de middelbare school begint.

Doelen

Op de lange termijn:

- Het verbeteren van de prestaties van de leerlingen op het gebied van wiskunde op de secondary school.

Op de korte termijn:

- Wiskundeleraren trainen op hun vakgebied en in didactische vaardigheden.
- Hulpmiddelen aanschaffen voor het wiskundeonderwijs en middelen waarmee de leerlingen zelf kunnen trainen in wiskunde.

Activiteiten

In de periode van mei tot november 2016 organiseerden de Sisters twintig trainingssessies voor zes leraren van de junior secondary school en zes leraren van de senior klassen van de lagere school. Bovendien mochten nog zes leraren van andere klassen van de lagere school de trainingen bijwonen. Deze trainingen vonden plaats in het schoolgebouw buiten de gewone schooltijden, dat wil zeggen in de weekends en in de vakanties. Hiervoor werden twee trainers ingehuurd. Zij stelden een handboek samen dat werd gedrukt en beschikbaar gesteld voor iedere deelnemer aan de training.
De Sisters willen de leerlingen van de senior klassen van de lagere school op een niveau van wiskunde brengen dat nodig is voor de junior secondary school. Ze hopen dat leerlingen daardoor het idee laten varen dat het niet mogelijk is om goed te zijn in wiskunde.
Er werden relevante materialen voor de training aangeschaft. Voor de junior secondary school werden wiskundeboeken, oude examens en hulpmiddelen aangeschaft, zoals kralen, knikkers, wiskundesets. Deze boeken en materialen worden gebruikt op school.

Elk jaar zullen ongeveer 200 leerlingen de boeken gebruiken en dat voor minstens vijf jaar. In totaal zullen dus ongeveer 1000 leerlingen profijt hebben van de materialen.



Impressies van de Cluny Free The Children school

Feedback van de deelnemers aan de training

Een aantal punten van de feedback:

- Leraren deden vakkennis op en verbeterden hun vaardigheden op didactisch gebied.
- Leraren waren in staat om wiskundeonderwerpen te begrijpen die zij tot dan toe heel moeilijk hadden gevonden.
- De belangstelling voor wiskunde nam toe en leraren gingen wiskunde leuker vinden.
- Timemanagement bij het onderwijzen van wiskunde verbeterde.
- Leraren konden leerlingen beter adviseren en aanmoedigen om goed te presteren bij wiskunde.
- Leerlingen begrepen wiskundige onderwerpen beter door het gebruik van hulpmiddelen en ontwikkelden meer interesse in wiskunde. Daardoor luisteren ze ook beter naar de leraar tijdens de les.
- De leerlingen kijken nu uit naar de wiskundelessen.

De trainers moedigden de leraren aan wiskunde te zien als een spel: 'Hoe meer je het spel speelt, des te beter begrijp je het.' Bovendien legden ze er de nadruk op dat het nodig is om elke dag wiskunde te doen.

Resultaten

De resultaten voor wiskunde bij de nationale examens op het einde van de junior secondary school en de lagere school waren heel goed. Op de junior secondary school slaagden 50 van de 56 kandidaten. Op de lagere school zakte slechts één van de 60 leerlingen voor wiskunde.

Over de auteurs

Sister Mary Antony en Mrs. Josephine Nicol waren de contactpersonen van het WwF op De Cluny Free The Children school.

De vertaling van hun verslag is gemaakt door Juliëtte Feitsma, pr-functionaris WwF.



OLYMPIADEPUZZEL 93-6

GETALLENRIJ

Birgit van Dalen
Quintijn Puite

Vanaf deze jaargang vind je in nummers 2, 4 en 6 van *Euclides* een olympiadepuzzel. Het niveau van de puzzel is vergelijkbaar met de eerste of tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade. We moedigen je daarom aan om de puzzel ook met je klas te proberen: met enig doorzettingsvermogen zal een groepje leerlingen deze puzzel misschien ook wel kunnen oplossen.

Voor een getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ geldt de formule $a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$

voor alle positieve gehele n. Bekend is dat

$a_{98} = 9410$, $a_{100} = 9802$ en $a_{102} = 10202$.

Bereken alle mogelijke waarden van a_{1001}.

Stuur je oplossingen uiterlijk 9 juni naar *euclides@wiskundeolympiade.nl*. We zien graag niet alleen het door jou gevonden antwoord, maar ook de uitwerking. Onder de inzenders met een juiste uitwerking verloten we een cadeaubon van € 20,–.

Terugblik puzzel nr. 4

We hebben negen inzendingen ontvangen voor de puzzel *Vermenigvuldigen* en die waren allemaal correct! Deze opgave draaide om het vinden van een patroon dat al vrij snel ontstaat, namelijk dat de rij vanaf een gegeven moment constant is. Het was hier dus een goede strategie om gewoon de eerste termen eens uit te schrijven; dan zie je dat het tweede getal in de rij 2044 is en vervolgens dat 2044 · M uitkomt op een getal waarvan de som van de cijfers wederom 2044 is. Met het argument dat elke term alleen maar afhangt van zijn directe voorganger, is het nu duidelijk dat de rij constant 2044 blijft. Als winnaar is door loting Jan Meerhof uit de bus gekomen. De complete uitwerking van de puzzel en de lijst met alle inzenders van een juiste oplossing zijn te vinden op de website.

 *vakbladeuclides.nl/936olympiadepuzzel*

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.
ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Thomas van Berkel
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief *Euclides*.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2018

vr 18/5
UTRECHT
Jaarlijkse conferentie voor lerarenopleiders
Organisatie: ECENT en ELWIeR
Vergadercentrum Domstad

24/8 en 25/8 31/8 en 1/9
EINDHOVEN (aug) en **AMSTERDAM (aug/sep)**
Vakantiecursus 'Cryptografie: wiskunde in het dagelijks leven' Organisatie: Platform Wiskunde Nederland

vr 14/9
EINDHOVEN
Finale wiskunde olympiade 2018

ma 17/9
UTRECHT
Optimaal voorbereid naar het eindexamen W en SLO

vr 10/11
UTRECHT
Onderwijs meets onderzoek
Organisatie: NVvW, Freudenthalinstituut, SLO

ma 3/11
VEENENDAAL
Jaarvergadering / studiedag NVvW
Organisatie: NVvW

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 93

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
7	26 juni 2018	30 april 2018